

УДК 517.9

*Е.О. Терентьева***ЗАДАЧА ЛЭМБА**

Внутренняя и внешняя задачи Лэмба представляют исключительный интерес для геофизики, поскольку широко используются при моделировании волновых процессов, сопровождающих землетрясения. Приведен анализ решений внешней задачи Лэмба от сосредоточенного силового воздействия, приложенного к свободной границе упругой полуплоскости. Сравняется, решение, полученное в 1984 г. В.Б. Поручиковым, с решением, полученным в современном конечноэлементном программном комплексе Abaqus.

Ключевые слова: Лэмба задача, объемная волна, Рэлея волна, полупространство, полуплоскость.

*E.O. Terent'eva***LAMB PROBLEM**

Inner and outer Lamb problems are of extreme importance for various applications in geophysics, as these problems are often used for simulation of wave fields accompanying earthquakes. Solutions of the outer Lamb problem of concentrated force impact applied to the free surface of an elastic half-plane are analyzed in this article. Two solutions are compared: the analytical solution obtained in 1984 and the solution obtained in a modern FEM complex Abaqus.

Key words: Lamb problem, bulk wave, Rayleigh wave, halfspace, half-plane.

В 1885 г. Рэлей открыл волну, которая может распространяться вдоль плоской границы твердого упругого полупространства с вакуумом или воздухом медленнее поперечной объемной волны и амплитуда которой быстро затухает с глубиной. Рэлей также определил, что скорость этой волны $C_R \approx 0,6C_s$ (C_s — скорость поперечной волны), напомним, что $C_s < C_p$ (C_p — скорость продольной волны). Эти волны впоследствии были названы рэлеевскими, представляющими собой частный случай поверхностных волн. Они образуются при динамических воздействиях на поверхности упругих тел и используются для зондирования и изучения строения земной коры, исследования мантии Земли (используются длинные R -волны). Волны Рэлея, образующиеся при взрыве, несут в себе огромную долю энергии источника и, начиная с некоторого расстояния от эпицентра, начинают доминировать над другими сейсмическими волнами. Эти волны содержат информацию об источнике возмущений и свойствах среды. Волна Рэлея связана со свободной поверхностью (дневная поверхность) и представляет собой результат наложения продольных и поперечных волн. Частицы среды в волне движутся по эллиптическим орбитам в вертикальной плоскости, параллельной распространению волны. Вертикальная ось эллипса примерно в 1,47 раза превышает горизонтальную составляющую, причем эти компоненты распространяются со сдвигом фаз. Надо отметить, что найденное Рэлеем соотношение между вертикальной и горизонтальной амплитудами 1,47 относится к коэффициенту Пуассона $\nu = 0,25$ (при этом значении коэффициенты Ламе λ и μ оказываются равными).

Для определения скорости поверхностной волны Рэлей получил полином шестой степени

$$\eta^6 - 8\eta^4 + 8(3 - 2\xi^2)\eta^2 - 16(1 - \xi^2) = 0. \quad (1)$$

Корни этого полинома определяют скорость волны поверхностной волны, названной впоследствии рэлеевской. Для скорости рэлеевской волны в изотропной среде известно приближенное выражение, называемое формулой Бергмана — Виктора:

$$c_R = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} c_s, \quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Задача Лэмба. При моделировании сейсмических волн используют решения задач Лэмба. Новаторская работа Лэмба [1] (1904 г.) содержала большинство элементов, которые важны для аналитических исследований по моделированию распространения сейсмических волн в упругой среде. На работу Лэмба ссылаются как

на работу, где впервые в теории упругости были применены интегральные преобразования.

В [1] Лэмб рассмотрел задачу о динамическом действии сосредоточенной силы на границу полупространства или полуплоскости, меняющейся по времени (внешняя задача Лэмба), и аналогичную задачу с силой, меняющейся во времени и приложенной внутри упругого полупространства или полуплоскости (внутренняя задача Лэмба) (рис. 1). Он получил сложные интегральные уравнения для определения распространения колебаний по поверхности. Решение этих задач было сведено к интегральным уравнениям относительно скалярного и векторного потенциалов.

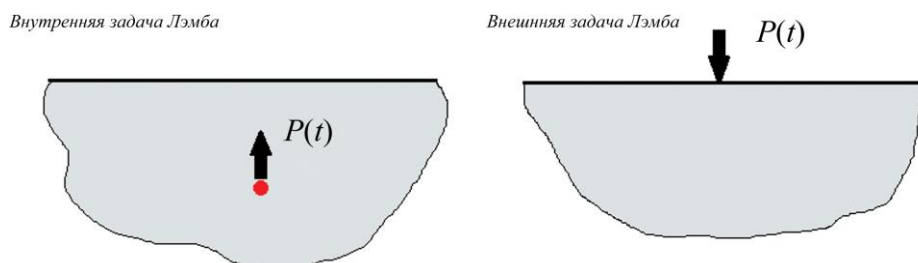


Рис. 1. Внутренние и внешние задачи Лэмба

В [1] с помощью техники интегральных преобразований Фурье по пространственным переменным временным переменным Лэмб нашел представление для этой задачи в пространстве изображений из преобразованных по Фурье величин. Обратить эти интегральные преобразования в то время не удалось. В [2] внутренняя и внешняя задачи были обобщены для нагрузок, движущихся с постоянной скоростью.

В [1] с помощью асимптотических оценок было показано, что основной вклад в поле смещений на свободной границе вносят рэлеевские волны. Было показано, что в отличие от объемных волн, затухающих в случае пространственной задачи по закону $\sim R^{-1}$, магнитуды волн Рэлея на свободной поверхности в пространственной

задаче затухают намного медленнее $\sim R^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно, в [1] впервые был подтвержден вывод Рэлея [3] о том, что поверхностные волны убывают медленнее объемных с увеличением расстояния от источника.

Уравнения движения Навье в изотропной среде в [1, 2] для построения решений записывались в форме Ламе — Клайперона

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\operatorname{div}u - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}u + b = \rho\ddot{u}, \quad (3)$$

где λ и μ — константы Ламе; u — поле перемещений; b — поле массовых сил; ρ — плотность среды. Использовалось представление Гельмгольца для поля массовых сил

$$b = -\nabla\alpha - \operatorname{rot}\beta, \quad (4)$$

где α и β — скалярный и векторный потенциалы соответственно, и представление Ламе — Грина для динамического поля перемещений

$$u = \nabla\varphi + \operatorname{rot}\psi, \quad (5)$$

где φ — скалярный, а ψ — векторный потенциалы.

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнения движения и применяя преобразования Лапласа по временной переменной, получим неоднородные уравнения Гельмгольца для скалярного и векторного потенциалов.

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\varphi' = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\alpha', \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\psi' = \frac{1}{\mu}\beta'. \quad (6)$$

Штрихи у потенциалов в (6) означают освобождение от гармонического множителя $e^{i\omega t}$.

Для решения пространственного уравнения Гельмгольца в [1, 2] использовалось фундаментальное решение

$$\varphi' = -\frac{1}{4\pi|x|} e^{i r_1 |x|}, \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1}. \quad (7)$$

Аналогичный вид имеет фундаментальное решение ψ' векторного уравнения Гельмгольца с заменой r_1 на r_2 и c_1 на c_2 , где c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной объемных волн соответственно

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (8)$$

В плоском случае фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца представимо в виде

$$\varphi' = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(r_1 |x|), \quad r_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (9)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка. Аналогичный вид имеет фундаментальное решение ψ' векторного уравнения Гельмгольца.

Отметим, что полученные интегральные представления оказались довольно сложными: в замкнутом виде решение получили лишь для гармонической нагрузки, а также в пространстве изображений в случае произвольной зависимости от времени.

Метод Каньяра. В 1930 г. Каньяр защитил кандидатскую диссертацию, в которой показал, что можно вычислять интегральные представления, полученные Лэмбом, считая, что частота не действительная величина, а комплексная. Тогда можно обойти некий полюс, когда в знаменателе получается выражение, содержащее особенность. Он показал, как именно можно обходить эти полюсы. С тех пор этот метод называется методом Каньяра.

Метод Каньяра начал широко применяться для решения всевозможных задач, связанных с внешними и внутренними задачами Лэмба. При этом оказывается возможным сформировать решение во временной области прямо из интегрального представления решения в частотной области без использования обратного преобразования Фурье.

В частности, с помощью похожей техники В.Б. Поручиков [4] в 1984 г. получил формулы для определения горизонтального и вертикального смещения на расстоянии « x » от точки приложения силы, если сила является дельта импульсом по времени $P(t) = P_0 \delta(t)$.

$$U_y(x, \theta, t) = -\frac{P}{\pi \mu c_2^2 x} \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{c_1^{-2} - \theta^2}}{S(\theta^2)} \right]; \quad (10)$$

$$U_x(x, \theta, t) = -\frac{P\theta}{\pi \mu x} \operatorname{Im} \left[\frac{2\sqrt{c_1^{-2} - \theta^2} \sqrt{c_2^{-2} - \theta^2} - c_2^{-2} + 2\theta^2}{S(\theta^2)} \right]; \quad (11)$$

$$S(\theta^2) = (c_2^{-2} - 2\theta^2)^2 + 4\theta^2 \sqrt{c_1^{-2} - \theta^2} \sqrt{c_2^{-2} - \theta^2}. \quad (12)$$

Формулы В.Б. Поручикова и программный комплекс Aباqus. Анализируются и сравниваются перемещения на свободной границе полуплоскости, полученные при помощи формул Поручикова и программного комплекса Aباqus.

На основе аналитических зависимостей (10) — (12), получим графики, характеризующие временные зависимости изменения горизонтальной, вертикальной компонент смещения и магнитуды от времени в выделенной точке на поверхности полуплоскости.

Расстояние от эпицентра до выделенной точки $x = 5$. Численные расчеты осуществлялись в программном комплексе *Scientific Workplace* (рис. 2—4).

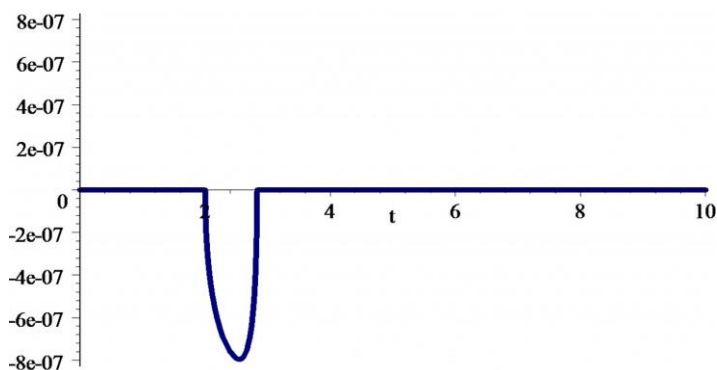


Рис. 2. Горизонтальная компонента перемещения

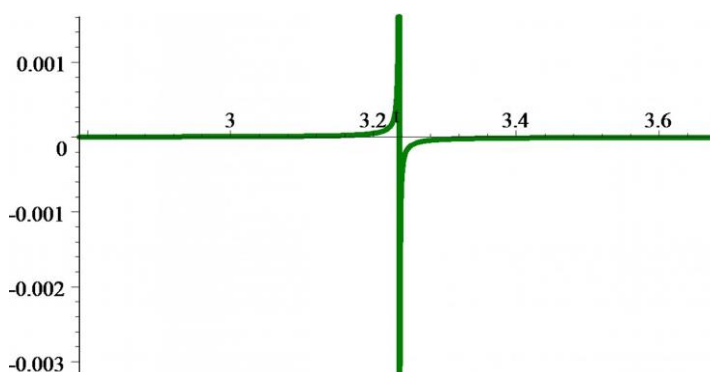


Рис. 3. Вертикальная компонента перемещения

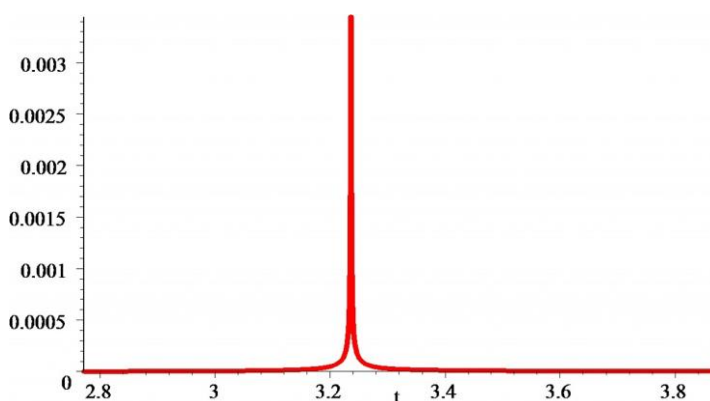


Рис. 4. Магнитуда

Численное моделирование в программном комплексе Abaqus. Ниже дано описание конечно-элементной модели для исследования волновых полей вблизи эпицентральной зоны внешней плоской и пространственной задач Лэмба. Была рассмотрена плоская внешняя задача Лэмба о динамическом действии сосредоточенной силы на границу полуплоскости, меняющийся по времени дельта-импульс $P(t) = P_0\delta(t)$. Эту функцию при моделировании заменяли треугольником, ширина которого равна 8. Необходимо отметить, что при сужении ширины треугольника за фронтом волны наблюдаются сильные осцилляции, что мешает анализу решения.

Был рассмотрен массив размером 200×100 . Расчеты проводились при следующих значениях физико-механических параметров: $\rho = 1$; $\nu = 0$; $E = 1$; $\lambda = 0$; $\mu = 0,5$. Этим значениям соответствуют скорости продольной и поперечной объемных волн:

$$c_1 \approx 1; c_2 \approx 0,71. \quad (13)$$

Скорость рэлеевской волны c_R определяется как (действительный положительный) корень бикубического уравнения Рэля (1). Эта скорость также может быть вычислена по приближенной формуле Бергмана — Викторова (2):

$$c_R \approx \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} c_2 \approx 0,617. \quad (14)$$

Решение осуществлялось с помощью явной разностной схемы (рис. 5).

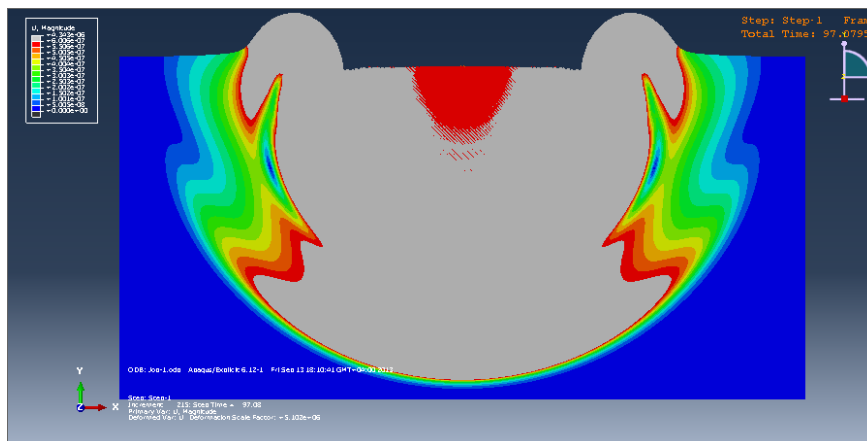


Рис. 5. Распространение возмущения в плоскости с деформацией поверхности

На графиках рис. 6—9 показаны временные зависимости магнитуды и горизонтальной и вертикальной компонент перемещений соответственно для 4 точек на поверхности полупространства, начиная с ближней эпицентральной зоны. U_2 — вертикальное смещение, U_1 — горизонтальное смещение, U — магнитуда.

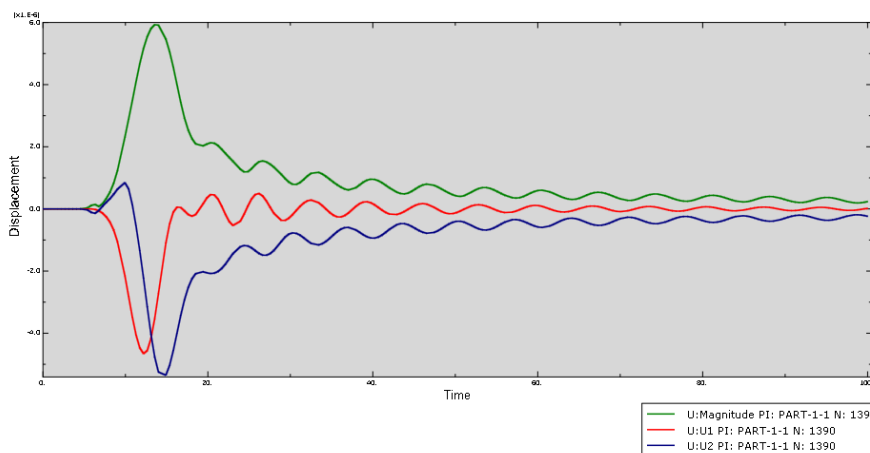


Рис. 6. 5 м от точки приложения силы

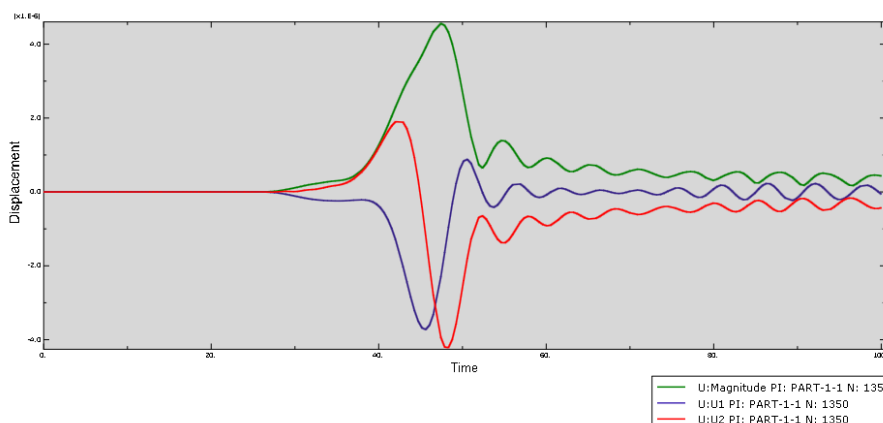


Рис. 7. 25 м от точки приложения силы

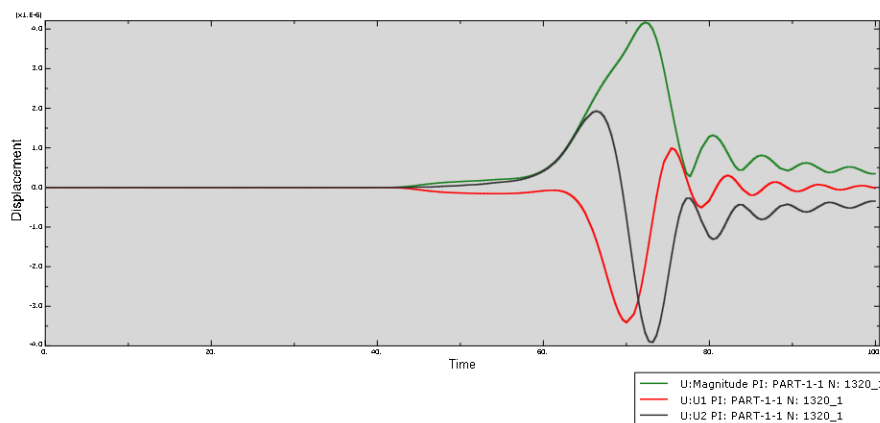


Рис. 8. 40 м от точки приложения силы

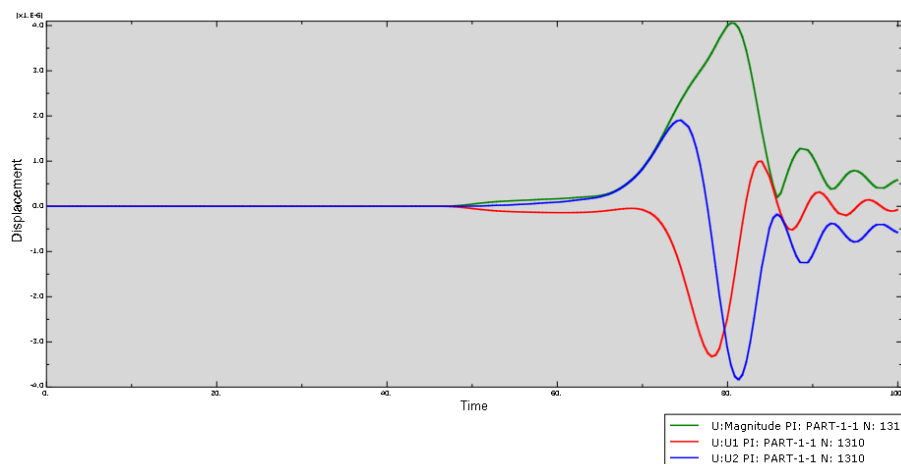


Рис. 9. 45 м от точки приложения силы

Заметим, что положительное значение вертикальной компоненты перемещения с увеличением времени увеличивается. В какой-то момент времени на поверхности возмущения от продольной и поперечной волны малы по сравнению с пиком, который приходит от рэлеевской волны.

Сравнивая графики, полученные в программном комплексе *Scientific Workplace*, с результатами, полученными в программном комплексе *Abaqus*, можно смело утверждать, что вычисления по методу конечных элементов и по аналитическим формулам В.Б. Поручикова [4] дают качественно согласующиеся волновые картины в точках на поверхности исследуемой системы.

На графике рис. 10 видно, что основной вклад в поле смещений на свободной границе вносят рэлеевские волны, и их амплитуда быстро затухает с глубиной, так что основная энергия концентрируется на поверхности.

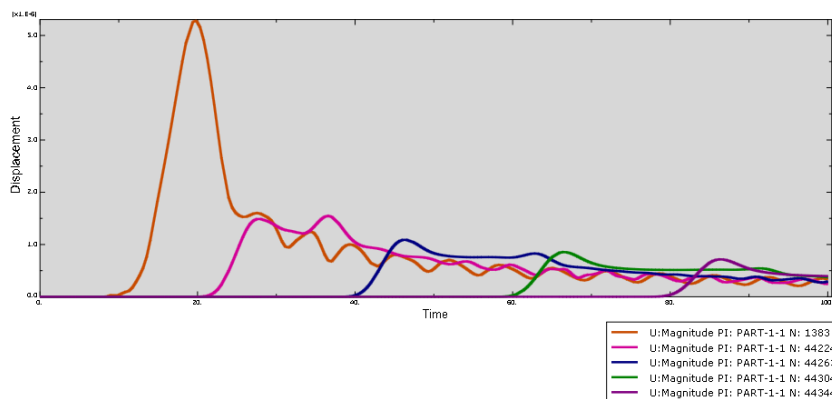


Рис. 10. Зависимость магнитуды от времени для пяти значений приведенных глубин $z = 0; 20; 40; 60; 80$ на приведенном расстоянии $x = 8,5$ от эпицентра

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Lamb H.* On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, 1904, vol. 203, pp. 1—42.
2. *Lamb H.* On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids. Philosophical Magazine, 1916, vol. 13, pp. 386—399, 539—548.
3. *Strutt J.W.* (Lord Rayleigh), On wave propagating along the plane surface of an elastic solid. Proc. London Math. Soc., 1885, vol. 17, pp. 4—11.
4. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М. : Наука, 1986.

REFERENCES

1. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. 1904, vol. 203, pp. 1—42.
2. Lamb H. On WAVes due to a Travelling Disturbance, with an Application to Waves in Super-posed Fluids. Philosophical Magazine. 1916, vol. 13, pp. 386—399, 539—548
3. Strutt J.W. (Lord Rayleigh), On Wave Propagating along the Plane Surface of an Elastic Solid. Proc. London Math. Soc. 1885, vol. 17, pp. 4—11.
4. Poruchikov V.B. *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti* [Methods of the Dynamic Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1986.

Поступила в редакцию в ноябре 2013 г.

Об авторе: **Терентьева Елена Олеговна** — аспирант кафедры сопротивления материалов, «Московский государственный строительный университет» (ФГБОУ ВПО «МГСУ»), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, Xelena-elena@yandex.ru.

About the author: **Terent'eva Elena Olegovna** — postgraduate student, Department of Strength of Materials, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Xelena-elena@yandex.ru.

Для цитирования:

Терентьева Е.О. Задача Лэмба [Электронный ресурс] // Строительство: наука и образование. 2013. Вып. 3. Ст. 3. Режим доступа: <http://www.nso-journal.ru>.

For citation:

Terent'eva E.O. *Zadacha Lemba* [Lamb Problem]. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2013. no. 3, paper 3. Available at: <http://www.nso-journal.ru>.