УДК 517.547.3

М.П. Овчинцев
ФГБОУ ВПО «МГСУ»

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрена задача оптимального восстановления первых производных от ограниченных аналитических функций в некоторой точке по информации об их значениях в конечном числе точек, лежащих в единичном круге. Единичный круг затем конформно отображен на односвязную область. В односвязной области рассмотрена аналогичная задача при соответствующих этому отображению точках. Приведено соотношение, связывающее погрешность наилучшего метода приближения в единичном круге и в односвязной области, а также выписаны их линейные наилучшие методы приближения. После этого рассмотрена задача оптимального восстановления второй производной. Снова выписано соотношение, связывающее погрешности наилучших методов приближения и их линейные наилучшие методы в единичном круге и в соответствующей ему при конформном отображении односвязной области.

Ключевые слова: линейный наилучший метод, погрешность наилучшего метода, конформное отображение, экстремальная функция, аналитическая функция.

M.P. Ovchintsev
MGSU

CONFORMAL INVARIANCE OF THE OPTIMAL RENEWAL TASKS OF THE DERIVATIVE FROM THE CONFINED ANALYTIC FUNCTIONS

In the article the optimal renewal task of first order derivatives from confined analytical functions in some point is considered according to the information on their values at end number of points situated in unit circle. The unit circle is then conformally reflected to a simply connected region. In the simply connected region analogical task is concerned at the points corresponding to this reflection. The author offers a correlation connecting the inaccuracy of the best approximation method in a unit cycle and in simply connected region, and their linear best approximation methods are written down. After that the optimal renewal task of the second order derivative is considered. Again the correlation connecting the inaccuracy of the best approximation methods and their best approximation methods in a unit cycle and in simply connected region corresponding to it at conformal reflection are written down.

Key words: linear best method, inaccuracy of the best method, conformal reflection, extremum function, analytical function.

Современные вычислительные комплексы позволяют производить статические и динамические расчеты конструкций, сооружений и их элементов сложной формы. Задача оценки максимальных значений перемещений, деформаций и напряжений на этапе предварительного проектирования позволяют охарактеризовать область работы конструкций (линейную, нелинейную), судить о прочности и надежности элементов конструкций, их предельном состоянии, что позволяет уточнить постановку рассматриваемой инженерной задачи. Поэтому решение экстремальных задач для тестовых областей актуально и имеет практическую значимость на стадии предварительного проектирования для оценки области работы конструкции, постановки задачи и верификации полученных в дальнейшем данных численных решений.

В настоящей работе методами теорий функций комплексных переменных решаются задачи оптимального восстановления ограни-

The modern computer complexes allow conducting statistical and dynamical calculations of the structures, constructions and their elements of the complicated shape. The task of estimating the maximal values of motions, deformations and stresses on the preliminary design stage allows characterizing the working range of the construction (linear, non-linear), estimate the stability and reliability of construction elements, their limit state. All the seal low specifying the engineering problem formulation. That's why extremum problems solution for test areas is current and of practical value on the preliminary design stage for estimation of the construction working range, task statement and verification of the obtained numerical solutions.

In the article the optimal renewal task of confined analytical functions and their derivatives in unit cycle and upper half plane is considered using the methods of the theory of complex derivative functions. The inaccuracy ченных аналитических функций и их производных в единичном круге и в верхней полуплоскости. Вычисление погрешности линейного наилучшего метода приближения сводится к исследованию экстремальных задач с дополнительными условиями. Все рассматриваемые задачи изучаются в односвязных областях.

Применение аналитического решения экстремальных задач для тестовых областей можно рассматривать как составную часть комплексного подхода расчета и проектирования конструкций, сооружений и их элементов.

Пусть $K=\{z:|z|<1\}$ — единичный круг, Γ — единичная окружность, D — односвязная область, которая получается при конформном отображении $\omega = F(z)$ круга K. Обозначим $B^1(D)=\{f(z):|f(z)|\le 1,\ z\in D\}$ — семейство аналитических в D функций. Возьмем в круге K различные точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

1. Предварительные сведения

Пусть $L, l_1, \ldots, l_n$ — линейные функционалы, заданные на пространстве ограниченных аналитических функций в области D, а $S(t_1, \ldots, t_n)$ — комплексная функция. Тогда погрешность приближения методом S функционала L по значениям функционалов $l_1, \ldots, l_n$ на множестве $B^1(D)$ называется $r_n(S)=\sup\limits_{f(z)\in B^1(D)}\left|L(f)-S(l_1(f),\ldots,l_n(f))\right|$.

Метод S_0 называется наилучшим методом приближения, если $r_n(S_0)=\inf\limits_S r_n(S)$.

Согласно [1—5], существует линейный наилучший метод $S_0=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k l_k(f)$, где c_k — комплексные числа ($k = 1, \ldots, n$). Причем его погрешность вычисляется по формуле

of the best approximation method is reduced to the investigation of extremum problems with additional conditions. All the considered problems are investigated in simply connected regions.

The application of the analytical solution of the extremum problems for test areas may be considered as a part of the complex approach to calculation and design of structures, constructions and their elements.

Let $K=\{z:|z|<1\}$ be a unit cycle, Γ — unit circumference, D — simply connected region, which at conformal reflection obtains $\omega = F(z)$ of the cycle K. Let us denote $B^1(D)=\{f(z):|f(z)|\le 1,\ z\in D\}$ — a family of analytical in D functions. Let us take in the cycle K different points $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

1. Preliminaries

Assume $L, l_1, \ldots, l_n$ — linear functionals, defined at space of confined analytical functions in the domain D, and $S(t_1, \ldots, t_n)$ — a complex function. Then the approximation inaccuracy by the method S of the functional L according to the values of the functionals $l_1, \ldots, l_n$ on the range $B^1(D)$ is called $r_n(S)=\sup\limits_{f(z)\in B^1(D)}\left|L(f)-S(l_1(f),\ldots,l_n(f))\right|$.

The method S_0 is called the best approximation method if $r_n(S_0)=\inf\limits_S r_n(S)$.

According to the work of K.Yu. Osipenko [1—5], the linear best method exists $S_0=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k l_k(f)$, where c_k — complex numbers ($k = 1, \ldots, n$). Its inaccuracy is calculated with the formula

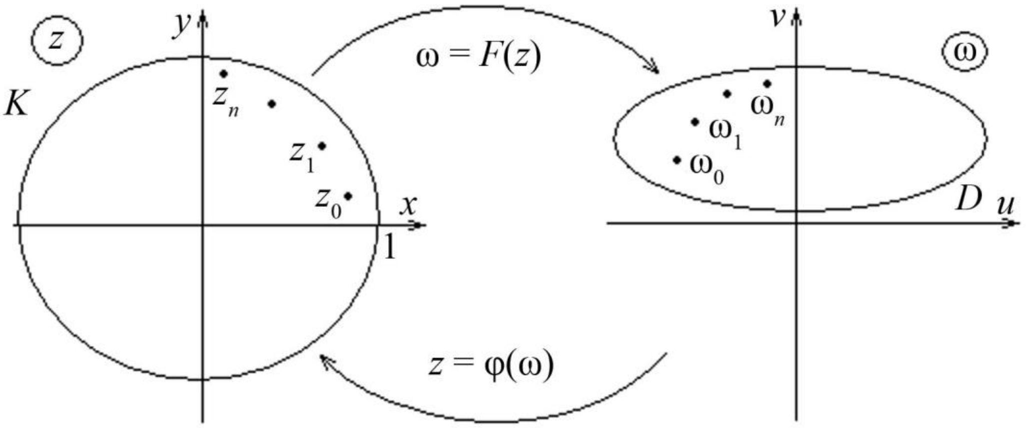
$$r_n(S_0)=\sup_{\substack{f(z)\in B^1(D)\\ l_1(f)=\ldots=l_n(f)=0}}\left|L(f)\right|. \tag{1}$$

В частности, если $L(f)=f(z_0)$, $l_1(f)=f(z_1), \ldots, l_n(f)=f(z_n)$, то линейный наилучший метод приближения (в области D) единственен [1].

Пусть теперь $\omega = F(z)$ отображает круг K на односвязную область D и $\omega_0=F(z_0),\ \omega_1=F(z_1),\ \ldots,\ \omega_n=F(z_n)$ (рис.).

In particular, if $L(f)=f(z_0)$, $l_1(f)=f(z_1), \ldots, l_n(f)=f(z_n)$, then the linear best approximation method (in the domain D) is unique [1].

Let now $\omega = F(z)$ reflect the cycle K on the simply connected region D and $\omega_0=F(z_0),\ \omega_1=F(z_1),\ \ldots,\ \omega_n=F(z_n)$ (fig.).



z = φ(ω) — обратное отображение

z = φ(ω) — inverse mapping

Рассмотрим задачу оптимального восстановления ограниченных аналитических функций в точке z_0 по информации об их значениях в точках $z_1, \ldots, z_n$. Здесь $L(f)=f(z_0),\ l_1(f)=f(z_1),\ \ldots,\ l_n(f)=f(z_n)$. Тогда $r(z_0, z_1, \ldots, z_n)=\sup\limits_{\substack{f(z)\in B^1(K)\\ f(z_1)=\ldots=f(z_n)=0}}|f(z_0)|$.

Аналогичную задачу рассмотрим в области D. Положим: $L(g)=g(\omega_0)$, $l_1(g)=g(\omega_1),\ \ldots,\ l_n(g)=g(\omega_n)\left(g(\omega)\in B^1(D)\right)$. Понятно, что

$$r(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)=\sup_{\substack{g(\omega)\in B^1(D)\\ g(\omega_1)=\ldots=g(\omega_n)=0}}|g(\omega_0)|.$$

Нетрудно убедиться в том, что в этом случае $r(z_0, z_1, \ldots, z_n)=r(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$. Кроме того, если $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k f(z_k)$ — линейный наилучший метод приближения в круге K, то $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k g(\omega_k)$ является линейным наилучшим методом в области D. Напомним еще некоторые результаты из работы С.Я. Хавинсона [6—20]. Если ω(ξ) — суммируемая функция, то имеет место соотношение двойственности [2, с. 12]

Let us consider the task of the optimal renewal of the confined analytical functions at the point z_0 according to the information on their values at the points $z_1, \ldots, z_n$. Here $L(f)=f(z_0),\ l_1(f)=f(z_1),\ \ldots,\ l_n(f)=f(z_n)$. Then $r(z_0, z_1, \ldots, z_n)=\sup\limits_{\substack{f(z)\in B^1(K)\\ f(z_1)=\ldots=f(z_n)=0}}|f(z_0)|$.

Let us consider the analogical task in the domain D. Assume: $L(g)=g(\omega_0)$, $l_1(g)=g(\omega_1),\ \ldots,\ l_n(g)=g(\omega_n)\left(g(\omega)\in B^1(D)\right)$. Understandably

$$r(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)=\sup_{\substack{g(\omega)\in B^1(D)\\ g(\omega_1)=\ldots=g(\omega_n)=0}}|g(\omega_0)|.$$

It is easy to show that in this case $r(z_0, z_1, \ldots, z_n)=r(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$. Moreover if $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k f(z_k)$ — is the linear best approximation method in the cycle K, then $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k g(\omega_k)$ is the linear best method in the domain D. We shall remind some other results of the work of S.Ya. Khavinson [6—20]. If ω(ξ) — is a summable function, there is a dual relation [2, p. 12]:

$$\sup_{f\in B^1(K)}\left|\int_\Gamma f(\zeta)\omega(\zeta)d\zeta\right|=\min_{\varphi\in H_1(K)}\int_\Gamma|\omega(\zeta)-\varphi(\zeta)||d\zeta|, \qquad (2)$$

где $H_1(K)$ — пространство Харди в единичном круге. Известно, что [2, с. 16] существуют экстремальные функции $f^*(z)$ в левой и $\varphi^*(z)\left(\varphi^*\in H_1(K)\right)$ — в правой части (2). Экс-

where $H_1(K)$ — is Hardy space in unit cycle. It is known [2, p. 16], that there exist extremum functions $f^*(z)$ in the left and $\varphi^*(z)\left(\varphi^*\in H_1(K)\right)$ in the right part (2). The тремальная функция $\varphi^*(z)$ — единственна, а $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}(\delta\in R)$. Кроме того, функции $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ являются экстремальными тогда и только тогда, когда выполняется почти везде на Γ соотношение

extremum function $\varphi^*(z)$ is unique, and $f^*(z)$ is unique up to a multiplier $e^{i\delta}(\delta\in R)$. Moreover, the functions $f^*(z)$ and $\varphi^*(z)$ яare extremum only it almost everywhere on Γ the relation is held

$$f^*(\zeta)\left[\omega(\zeta)-\varphi^*(\zeta)\right]d\zeta = e^{i\delta}\left|\omega(\zeta)-\varphi^*(\zeta)\right|ds, \tag{3}$$

где $\delta\in R$ (δ — постоянная). Наконец, пусть $\omega(z)$ — мероморфная функция в $\bar{K}$, имеет m полюсов. Тогда функция

where $\delta\in R$ (δ — conctant). Finally let $\omega(z)$ be a meromorphic function in $\bar{K}$, has m poles. Then the function

$$R(z) = f^*(z)\left[\omega(z)-\varphi^*(z)\right] \tag{4}$$

имеет в $\bar{K}$ m–1 нулей.

has in $\bar{K}$ m–1 zeroes.

2. Оптимальное восстановление первых производных в точке

Пусть
$L(f)=f'(z_0),\ l_1(f)=f(z_0),$
$l_2(f)=f(z_1),\ \ldots,\ l_{n+1}f(z)=f(z_n),$ где $f(z)\in B^1(K)$. Если $S_0=\sum_{k=0}^{n}c_k f(z_k)$ — линейный наилучший метод приближения, то его погрешность вычисляется по формуле, где $r_n(S_0)=r_1(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)$

2. Optimal renewal of first order derivatives in the point

Assume that
$L(f)=f'(z_0),\ l_1(f)=f(z_0),$
$l_2(f)=f(z_1),\ \ldots,\ l_{n+1}f(z)=f(z_n),$ where $f(z)\in B^1(K)$. If $S_0=\sum_{k=0}^{n}c_k f(z_k)$ — the linear best approximation method, then its inaccuracy is calculated via formula, where $r_n(S_0)=r_1(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)$

$$r_1(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)=\sup_{\substack{f(z)\in B^1(K)\\ f(z_0)=f(z_1)=\ldots=f(z_n)=0}}\left|f'(z_0)\right|. \tag{5}$$

Тогда

Then

$$\begin{aligned} r_1(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n) &= \sup_{f(z)\in B^1(K)}\left|f'(z_0)-\sum_{k=0}^{n}c_k f(z_k)\right| = \\ &= \sup_{f(z)\in B^1(K)}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{1}{(\zeta-z_0)^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\zeta-z_k}\right)f(\zeta)d\zeta\right|. \end{aligned} \tag{6}$$

Как мы уже говорили, существует экстремальная функция задачи (6) (а, значит, и (5)); причем она единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}(\delta\in R)$. Убедимся в том, что в этом случае линейный наилучший метод приближения единственен.

Пусть $\varphi^*(z)$ — экстремальная функция правой части (2), где

As we already stated, there exists the extremum function of the task (6) (consequently, also (5)); and it is unique up to a multiplier $e^{i\delta}(\delta\in R)$. Let us make sure that in this case the linear best approximation method is unique.

Let $\varphi^*(z)$ — be the extremum function of the right part of (2), where

$$\omega(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{(\zeta-z_0)^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\zeta-z_k}\right). \tag{7}$$

Для экстремальных функций $f^*(z)$ и $\varphi^*(z)$ выполняется соотношение (3). Предположим, что существует еще один линейный наилуч-

For extremum functions $f^*(z)$ and $\varphi^*(z)$ the relation is held (3). Suppose that there is ший метод $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f\left(z_k\right)$. Тогда имеет место уравнение

another linear best method $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f\left(z_k\right)$. Then there is an equation

$$f^*(\zeta)\left[\omega_1(\zeta)-\varphi_1^*(\zeta)\right]d\zeta = e^{i\delta_1}\left|\omega_1(\zeta)-\varphi^*(\zeta)\right|ds, \quad (8)$$

где $\varphi_1^*(z)\in H_1\left(K\right),\ \delta_1\in R,$

where $\varphi_1^*(z)\in H_1\left(K\right),\delta_1\in R,$

$$\omega_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\left(\zeta-z_0\right)^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{\zeta-z_k}\right). \quad (9)$$

Функция

The function

$$R(z)=f^*(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\left(z-z_0\right)^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{z-\bar{z}_k}\right)-\varphi^*(z)\right]$$

не принимает нулевых значений в $\bar{K}$. Отсюда функция

Doesn’t tale on zero values in $\bar{K}$. Hence the function

$$Q(z)=\frac{\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\left(z-z_0\right)^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{z-z_k}\right)-\varphi_1^*(z)}{\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\left(z-z_0\right)^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{z-z_k}\right)-\varphi^*(z)}$$

аналитична в $\bar{K}$ и на границе Γ принимает неотрицательные значения. Так как $ImQ(\zeta)=0(I\in\Gamma)$, то $ImQ(z)=0\left(\forall z\in\bar{K}\right)$. А отсюда следует, что $Q(z)=\mathrm{const}\left(\forall z\in\bar{K}\right)$. Понятно, что $Q\left(z_0\right)=1$. Отсюда и вытекает, что $\alpha_k = c_k(k = 0, 1, \ldots, n)$.

После этого убедимся в том, что существует экстремальная функция задачи

is analytical in $\bar{K}$ and on the border Γ it takes on nonnegative values. As $ImQ(\zeta)=0(I\in\Gamma)$, then $ImQ(z)=0\left(\forall z\in\bar{K}\right)$. From this follows, that $Q(z)=\mathrm{const}\left(\forall z\in\bar{K}\right)$. Understandable that $Q\left(z_0\right)=1$. That’s why $\alpha_k = c_k(k = 0, 1, \ldots, n)$.

After that let us make sure, that the extremum function exists for the task

$$r_1\left(\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n\right)=\sup_{\substack{g(\omega)\in B^1(D)\\ g(\omega_1)=\ldots=g(\omega_n)=0}}\left|g'\left(\omega_0\right)\right|. \quad (10)$$

Обозначим $r_1\left(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n\right)=a,$ $r_1\left(\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n\right)=b.$

Рассмотрим функцию $g^*(\omega)=f^*\left(\varphi(\omega)\right)$.

Тогда

$g^*(\omega)\in B^1\left(D\right),$

$g^*\left(\omega_1\right)=\ldots=g^*\left(\omega_n\right)=g^*\left(\omega_0\right)=0$

и $\left|g^{*\prime}\left(\omega_0\right)\right|= \ =\left|f^{*\prime}\left(z_0\right)\right|\left|\varphi'\left(\omega_0\right)\right|=a\left|\varphi'\left(\omega_0\right)\right|$. Отсюда следует, что $b\ge a\left|\varphi'\left(\omega_0\right)\right|$.

Далее для любого числа $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ существует функция $g(\omega)$ такая, что

$g(\omega)\in B^1\left(D\right)g\left(\omega_1\right)=\ldots=g\left(\omega_n\right)=g\left(\omega_0\right)=0$

Let us write down $r_1\left(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n\right)=a,$ $r_1\left(\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n\right)=b.$

Consider the function $g^*(\omega)=f^*\left(\varphi(\omega)\right)$.

Then

$g^*(\omega)\in B^1\left(D\right),$

$g^*\left(\omega_1\right)=\ldots=g^*\left(\omega_n\right)=g^*\left(\omega_0\right)=0$

and $\left|g^{*\prime}\left(\omega_0\right)\right|=\left|f^{*\prime}\left(z_0\right)\right|\left|\varphi'\left(\omega_0\right)\right|=a\left|\varphi'\left(\omega_0\right)\right|$.

This implies that $b\ge a\left|\varphi'\left(\omega_0\right)\right|$.

Then for any number $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ there is a function $g(\omega)$ such, that

$g(\omega)\in B^1\left(D\right)g\left(\omega_1\right)=\ldots=g\left(\omega_n\right)=g\left(\omega_0\right)=0$

и $\left|g'(\omega_0)\right| > b-\varepsilon$. Возьмем функцию $f(z)=g(F(z))$. Тогда $f(z)\in B^1(K)$, $f(z_1)=\ldots=f(z_n)=f(z_0)=0$. Так как $\left|f'(z_0)\right|=\left|g'(\omega_0)\right|\left|F'(z_0)\right|$, то $a\geq(b-\varepsilon)\left|F'(z_0)\right|$. Отсюда получается, что $b\leq a\left|\varphi'(\omega_0)\right|$. Следовательно, $b=a\left|\varphi'(\omega_0)\right|$ и функция $g^*(\omega)= = f^*(F(z))$ действительно является экстремальной функцией задачи (10).

Заметим, что попутно мы установили

and $\left|g'(\omega_0)\right| > b-\varepsilon$. Let's take the function $f(z)=g(F(z))$. Then $f(z)\in B^1(K)$, $f(z_1)=\ldots=f(z_n)=f(z_0)=0$. As $\left|f'(z_0)\right|= =\left|g'(\omega_0)\right|\left|F'(z_0)\right|$, then $a\geq(b-\varepsilon)\left|F'(z_0)\right|$. This implies that $b\leq a\left|\varphi'(\omega_0)\right|$. Consequently, $b=a\left|\varphi'(\omega_0)\right|$ and the function $g^*(\omega)= = f^*(F(z))$ is really the extremum function of the task (10).

We should note, that simultaneously we found out that

$$r_1(z_0, z_1, \ldots, z_n)=\left|F'(z_0)\right|r_1(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n). \tag{11}$$

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть $\omega = F(z)$ конформно отображает круг K на односвязную область D. Тогда, если $\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)$ является линейным наилучшим методом приближения в круге K, то $\sum_{k=0}^{n}\varphi'(\omega_0)c_k g(\omega_k)$ будет линейным наилучшим методом в области D.

Доказательство. Так как $\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)$ — линейный наилучший метод в круге K, то $\left|f'(z_0)-\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)\right|\leq r_1(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ для любой $f(z) \in B^1(K)$. Пусть $g(\omega) \in B^1(D)$. Тогда функция $f(z)=g(F(z))\in B^1(K)$. Поскольку $f'(z_0)=g'(\omega_0)F'(z_0)$, то (см. (11))

$$\left|F'(z_0)g'(\omega_0)-\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)\right|\leq r_1(z_0, z_1, \ldots, z_n),$$

$$\left|g'(\omega_0)-\sum_{k=0}^{n}\varphi'(\omega_0)c_k q(\omega_k)\right|\leq r_1(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Отсюда и вытекает, что $\sum_{k=0}^{n}\varphi'(\omega_0)c_k g(\omega_k)$ — линейный наилучший метод в области D. Заметим, если

$f(z)\in B^1(K)$, $f(z_1)=\ldots=f(z_n)=f(z_0)=0$,

то $f(z)=\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}B(z)g(z)$, где $g(z) \in B^1(K)$, а $B(z)=\prod_{k=1}^{n}\dfrac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}$.

Now let's establish the following theorem.

Theorem. Let $\omega = F(z)$ conformally reflects the cycle K on the simply connected region D. Then if $\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)$ is the linear best approximation method in the cycle K, then $\sum_{k=0}^{n}\varphi'(\omega_0)c_k g(\omega_k)$ will be linear best method in the domain D.

Proof. As $\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)$ — is the linear best method in the cycle K, then $\left|f'(z_0)-\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)\right|\leq r_1(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ for any $f(z) \in B^1(K)$. Let $g(\omega) \in B^1(D)$. Then the function $f(z)=g(F(z))\in B^1(K)$. As $f'(z_0)=g'(\omega_0)F'(z_0)$, then (ref (11))

$$\left|F'(z_0)g'(\omega_0)-\sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)\right|\leq r_1(z_0, z_1, \ldots, z_n),$$

$$\left|g'(\omega_0)-\sum_{k=0}^{n}\varphi'(\omega_0)c_k q(\omega_k)\right|\leq r_1(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Hence $\sum_{k=0}^{n}\varphi'(\omega_0)c_k g(\omega_k)$ — is the linear best method in the domain D. We should note that if $f(z) \in B^1(K)$, $f(z_1) = \ldots = f(z_n) = f(z_0) = 0$, then $f(z)=\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}B(z)g(z)$, where $g(z) \in B^1(K)$, and $B(z)=\prod_{k=1}^{n}\dfrac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}$.

Нетрудно убедиться в том, что $r_1(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{1-|z_0|^2}|B(z_0)|$.

3. Оптимальное восстановление вторых производных в точке

В этом случае $L(f) = f''(z_0)$, $l_1(f) = f'(z_0)$, $l_2(f) = f(z_0)$, $l_3(f) = f(z_1)$, …, $l_{n+2}(f) = f(z_n)$. Как мы знаем, существует линейный наилучший метод приближения $S_0 = cf'(z_0) + \sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)$, а его погрешность $r_n(S_0) = r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ определяется по (12)

It is easy to show that $r_1(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{1-|z_0|^2}|B(z_0)|$.

3. Optimal renewal of second order derivatives in the point

In this case $L(f) = f''(z_0)$, $l_1(f) = f'(z_0)$, $l_2(f) = f(z_0)$, $l_3(f) = f(z_1)$, …, $l_{n+2}(f) = f(z_n)$. As we know, there is the linear best approximation method $S_0 = cf'(z_0) + \sum_{k=0}^{n} c_k f(z_k)$, and its inaccuracy $r_n(S_0) = r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ is determined by (12)

$$r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{\substack{f(z)\in B^1(K) \\ f(z_1)=\ldots=f(z_n)=f(z_0)=f'(z_0)=0}} |f''(z_0)|. \quad (12)$$

Ясно, что

It is clear that

$$r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f(z)\in B^1(K)} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{2}{(\zeta - z_0)^3} - \frac{c}{(\zeta - z_0)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k} \right) f(\zeta) d\zeta \right|. \quad (13)$$

Существует экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (13) (а, значит и (12)), причем она единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$, $\delta \in R$. Убедимся в том, что линейный наилучший метод единственен. Для экстремальных функций $f_1^*(z)$ и $\varphi_2^*(z)$ (из правой части (2)) выполняется соотношение (3), где

There exists the extremum function $f^*(z)$ of the task (13) (consequently also (12)), and it's unique up to a multiplier $e^{i\delta}$, $\delta \in R$. Let us make sure that the linear best method is unique. For extremum functions $f_1^*(z)$ и $\varphi_2^*(z)$ (from the right part of (2)) the relation is held (3), where

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{2}{(\zeta - z_0)^3} - \frac{c}{(\zeta - z_0)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k} \right).$$

Предположим, что существует еще какой-нибудь линейный наилучший метод $\gamma + \sum_{k=0}^{n} \gamma_k f(z_k)$. Тогда (см. (3))

$f_1(\zeta)\left[\omega_1(\zeta) - \varphi_3^*(\zeta)\right] d\zeta = \delta^{i\delta_3} \left|\omega_1(\zeta) - \varphi_3^*(\zeta)\right| ds \times \left(\delta_3 \in R, \varphi_3^*(\zeta) \in H_1(K)\right)$, где

Assume that there exists some other linear best method $\gamma + \sum_{k=0}^{n} \gamma_k f(z_k)$. Then (ref. (3))

$f_1(\zeta)\left[\omega_1(\zeta) - \varphi_3^*(\zeta)\right] d\zeta = \delta^{i\delta_3} \left|\omega_1(\zeta) - \varphi_3^*(\zeta)\right| ds \times \left(\delta_3 \in R, \varphi_3^*(\zeta) \in H_1(K)\right)$, where

$$\omega_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{2}{(\zeta - z_0)^3} - \frac{\gamma}{(\zeta - z_0)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{\zeta - z_k} \right).$$

Рассмотрим функцию

Consider the function

$$Q_1(z) = \frac{\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{2}{(z - z_0)^3} - \frac{\gamma}{(z - z_0)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{z - z_k} \right) - \varphi_3^*(z)}{\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{2}{(z - z_0)^3} - \frac{c}{(z - z_0)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z - z_k} \right) - \varphi_2^*(z)}.$$

Так как функция $R_1(z) = f_1^*(z) \times \times \left[\omega(z) - \varphi_2^*(z) \right]$ не имеет нулей в K, то $Q_1(z)$ — аналитична в $\bar{K}$. Кроме того, $Q_1(z)$ на границе Γ круга K принимает неотрицательные значения. Отсюда $Q_1(z_0) \equiv \text{const}$. Так как $Q_1(z_0) = 1$, то отсюда и вытекает, что $\gamma = c,\ \gamma_k = c_k (k = 0, 1, \ldots, n)$. Рассмотрим аналогичную задачу в односвязной области D. Тогда

As the function $R_1(z) = f_1^*(z) \times \times \left[\omega(z) - \varphi_2^*(z) \right]$ doesn't have zeroes in K, $Q_1(z)$ — is analytical in $\bar{K}$. Moreover, $Q_1(z)$ on the border Γ of the cycle K takes up nonnegative values. Consequently $Q_1(z_0) \equiv \text{const}$. As $Q_1(z_0) = 1$, this implies that $\gamma = c,\ \gamma_k = c_k \left(k = 0, 1, \ldots, n \right)$. Let us consider the analogical task in the simply connected region D. Then

$$r_2\left(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n\right) = \sup_{\substack{g(\omega) \in B^1(D) \\ g(\omega_1) = \ldots = g(\omega_n) = g(\omega_0) = g'(\omega_0) = 0}} \left| g''\left(\omega_0\right) \right|. \tag{14}$$

Лемма. Имеет место следующее равенство

Lemma. The following equality takes place

$$r_2\left(z_0, z_1, \ldots, z_n\right) = \left| F'\left(z_0\right) \right|^2 r_2\left(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n\right). \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим

Proof. Let us denote

$$r_2\left(z_0, z_1, \ldots, z_n\right) = \alpha,\ r_2\left(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n\right) = \beta.$$

Рассмотрим функцию $g(\omega) = f^*\left(\varphi(\omega)\right)$. Тогда

Consider the function $g(\omega) = f^*\left(\varphi(\omega)\right)$. Then

$$g(\omega) \in B^1(D),\ g\left(\omega_1\right) = \ldots = g\left(\omega_n\right) = g\left(\omega_0\right) = g'\left(\omega_0\right) = 0.$$

Так как $g'(\omega) = f^*\left(\varphi(\omega)\right)\varphi'(\omega)$, а $g''(\omega) = f^{*''}\left(\varphi(\omega)\right)\left(\varphi'(\omega)\right)^2 + f^{*'}\left(\varphi(\omega)\right)\varphi''(\omega)$, то $\left| g''\left(\omega_0\right) \right| = \left| f^{*''}\left(z_0\right) \right| \left| \varphi'\left(\omega_0\right) \right|^2$. И, значит, $\beta \ge \alpha \left| \varphi'\left(\omega_0\right) \right|^2$. Далее, для любого числа $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ существует функция $g(\omega)$ такая, что $g(\omega) \in B^1(D)$, $g\left(w_1\right) = \ldots = g\left(w_n\right) = g\left(w_0\right) = g'\left(w_0\right) = 0$ и $\left| g''\left(\omega_0\right) \right| > \beta - \varepsilon$. Рассмотрим функцию $f(z) = g(F(z)) = g(F(z))$. Тогда $f(z) \in B^1\left(K\right)$, $f\left(z_1\right) = \ldots = f\left(z_n\right) = f\left(z_0\right) = f'\left(z_0\right) = 0$. Поскольку $f''\left(z_0\right) = g^{*''}\left(\omega_0\right)\left(F'\left(z_0\right)\right)^2 + g^{*'}\left(\omega_0\right) \times \times F'\left(z_0\right)$, то $\left| f''\left(z_0\right) \right| = \left| g''\left(\omega_0\right) \right| \left| F'\left(z_0\right) \right|^2$ и, значит, $\alpha \ge (\beta - \varepsilon) \left| F'\left(z_0\right) \right|^2$. Отсюда следует, что $\left| \varphi'\left(\omega_0\right) \right|^2 \alpha \ge \beta$ и, следовательно, получим (15).

Заметим, что попутно мы убедились в том, что функция $g^*(\omega) = f^*\left(\varphi(\omega)\right)$ является экстремальной функцией задачи (14).

As $g'(\omega) = f^*\left(\varphi(\omega)\right)\varphi'(\omega)$, and $g''(\omega) = f^{*''}\left(\varphi(\omega)\right)\left(\varphi'(\omega)\right)^2 + f^{*'}\left(\varphi(\omega)\right)\varphi''(\omega)$, then $\left| g''\left(\omega_0\right) \right| = \left| f^{*''}\left(z_0\right) \right| \left| \varphi'\left(\omega_0\right) \right|^2$. This means that, $\beta \ge \alpha \left| \varphi'\left(\omega_0\right) \right|^2$. For any number $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ there is a function $g(\omega)$ such that $g(\omega) \in B^1(D)$, $g(\omega_1) = \ldots = g(\omega_n) = g(\omega_0) = g'(\omega_0) = 0$ and $\left| g''\left(\omega_0\right) \right| > \beta - \varepsilon$. Consider the function $f(z) = g(F(z)) = g(F(z))$. Then $f(z) \in B^1\left(K\right)$, $f\left(z_1\right) = \ldots = f\left(z_n\right) = f\left(z_0\right) = f'\left(z_0\right) = 0$. As $f''\left(z_0\right) = g^{*''}\left(\omega_0\right)\left(F'\left(z_0\right)\right)^2 + g^{*'}\left(\omega_0\right)F'\left(z_0\right)$, то $\left| f''\left(z_0\right) \right| = \left| g''\left(\omega_0\right) \right| \left| F'\left(z_0\right) \right|^2$ and, consequently, $\alpha \ge (\beta - \varepsilon) \left| F'\left(z_0\right) \right|^2$. It follows that $\left| \varphi'\left(\omega_0\right) \right|^2 \alpha \ge \beta$ and, consequently, we obtain (15).

We should note that simultaneously we made sure that the function $g^*(\omega) = f^*\left(\varphi(\omega)\right)$ is the extremum function of the task (14).

Теорема. Если $cf'\left(z_0\right) + \sum_{k=0}^{n} c_k f\left(z_k\right)$ — линейный наилучший метод приближения в единичном круге, то

Theorem. If $cf'\left(z_0\right) + \sum_{k=0}^{n} c_k f\left(z_k\right)$ — the linear best approximation method in the unit cycle, than

$$\frac{cF'(z_0)-F''(z_0)}{\left(F'(z_0)\right)^2}g'(\omega_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\left(F'(z_0)\right)^2}c_k g(\omega_k)$$

является линейным наилучшим методом в области D.

Доказательство. Так как исходный метод является наилучшим, то

is the linear best method in the region D.

Proof. As the original method is the best one, then

$$\left|f''(z_0)-cf'(z_0)-\sum_{k=0}^{n}c_k f(z_k)\right|\le r_2(z_0, z_1, \ldots, z_k)$$

для любой функции $f(z) \in B^1(K)$. Пусть $g(\omega) \in B^1(D)$. Тогда $f(z) = g(F(z)) \in B^1(K)$. Поскольку $f'(z)=g'(F(z))F'(z),\ f''(z)=g''(F(z))\times$ $\times(F'(z))^2+g'(F(z))F''(z)$, то

for any function $f(z) \in B^1(K)$. Let $g(\omega) \in B^1(D)$. Then $f(z) = g(F(z)) \in B^1(K)$. As, $f'(z)=g'(F(z))F'(z),\ f''(z)=g''(F(z))\times$ $\times(F'(z))^2+g'(F(z))F''(z)$, then

$$\left|g''(\omega_0)\left(F'(z_0)\right)^2+g'(\omega_0)F''(z_0)-cg'(\omega_0)F'(z_0)-\sum_{k=0}^{n}c_k g(\omega_k)\right|\le r_2(z_0, z_1, \ldots, z_n).$$

Отсюда (см. (15))

Consequently (ref. (15))

$$\left|g''(\omega_0)-\frac{cF'(z_0)-F''(z_0)}{\left(F'(z_0)\right)^2}g'(\omega_0)-\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\left(F'(z_0)\right)^2}g(\omega_k)\right|\le r_2(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

и, значит

hence

$$\frac{cF'(z_0)-F''(z_0)}{\left(F'(z_0)\right)^2}g'(\omega_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\left(F'(z_0)\right)^2}g(\omega_k)$$

является линейным наилучшим методом в области D. Теорема доказана.

is the linear best method in the domain D. The theorem is proved.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Осипенко К.Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Математические заметки. 1976. Т. 19. Вып. 1. С. 29—40.

2. *Осипенко К.Ю.* Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью // Математический сборник. 1982. Т. 118 (160). № 3 (7). С. 350—370.

3. *Осипенко К.Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Математические заметки. 1972. Т. 12. Вып. 4. С. 465—476.

4. *Осипенко К.Ю.* О произведениях Бляшке, наименее уклоняющихся от нуля // Математические заметки. 1990. Т. 47. Вып. 5. С. 71—80.

5. *Osipenko K.Yu.* On optimal extrapolation and interpolation of fuzzy analytic functions // Analysis Mathematica. 1987. 13. Pp. 199—210.

REFERENCES

1. Osipenko K.Yu. Nailuchshee priblizhenie analiticheskikh funktsiy po informatsii ob ikh znacheniyakh v konechnom chisle tochek [The Best Approximation of Analytical Functions According to the Information on their Values in Finite Number of Points]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 1976, vol. 19, no. 1, pp. 29—40. (In Russian)

2. Osipenko K.Yu. Nailuchshie metody priblizheniya analiticheskikh funktsiy, zadannykh s pogreshnost'yu [The Best Approximation Methods of the Analytical Functions Preset with an Innacuracy]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik Mathematics]. 1982, vol. 118 (160), no. 3 (7), pp. 350—370. (In Russian)

3. Osipenko K.Yu. Optimal'naya interpolyatsiya analiticheskikh funktsiy [Optimal Interpolation of the Analytical Functions]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 1972, vol. 12, no. 4, pp. 465—476. (In Russian)

4. Osipenko K.Yu. O proizvedeniyakh Blyashke, naimenee uklonyayushchikhsya ot nulya [On Blaschke Products Least Deviating from Zero]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 1990, vol. 47, no. 5, pp. 71—80. (In Russian)

5. Osipenko K.Yu. On Optimal Extrapolation and Interpolation of Fuzzy Analytic Functions. Analysis Mathematica. 1987, no. 13. Pp. 199—210. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF02115934. (In Russian)

6. *Хавинсон С.Я.* Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различные обобщения. М. : МИСИ им В.В. Куйбышева, 1981. С. 12—17.

7. *Безяев В.И., Коняев Ю.А.* Асимптотика решений неавтономных систем и приложений в квантовой механике // Вестник МГСУ. 2014. № 8. С. 28—35.

8. *Fisher S. and Micchelli C.* The n-width of analytic functions // Duke Math J. 1980. Vol. 47. No. 4. Pp. 789—801.

9. *Bojanov B.D.* Best quadrature formula for a certain class of analytic functions // Zastos, Mat. 1974. VXIV. Pp. 441—447.

10. *Фриштер Л.Ю.* Расчетно-экспериментальный метод исследования НДС составных конструкций в зонах концентрации напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2008. № 2. С. 20—27.

11. *Pogosinski W., Shapiro H.* On certain extremum problems for analytic functions // Acta Math. 1953. Vol. 90. Pp. 287—318.

12. *Singer I.* Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Berein, Springer — Verlag. 1970. 462 p.

13. *Фриштер Л.Ю., Мозгалева М.Л.* Сопоставление возможностей численного и экспериментального моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом их геометрической нелинейности // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Т. 6. № 1—2. С. 221—222.

14. *Бахвалов Н.С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Вычислительная математика и математическая физика. 1971. № 4 (11). С. 1014—1018.

15. *Micchelli C., Rivlin T.* A survey of optimal recovery, Optimal estimation in approximation theory. N.Y. : Plenum press., 1977. Pp. 1—54.

16. *Shirinov M.I., Khajrullin R.Z.* A control system for goods delivery with the use of intermediate warehouses // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 146—152.

17. *Robinson R.* Analytic functions in circular rings // Duke Math J. 1843. Vol. 10. No. 2. Pp. 341—354.

18. *Смирнов М.И., Хайруллин Р.З.* Математические модели, используемые в системе доставки товаров автотранспортом «Диспетчер» // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2002. № 13. С. 22.

19. *Duren P.L.* The theory of H_p spaces. N.Y. : Acad. Press, 1970. Pp. 1—258.

20. *Kahane J.P.* Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1874. Vol. 80. Pp. 788—804.

Поступила в редакцию в мае 2015 г.

6. Khavinson S.Ya. *Osnovy teorii ekstremal'nykh zadach dlya ogranichennykh analiti-cheskikh funktsiy i ikh razlichnye obobshcheniya* [Fundamentals of Extremum Problems Theory for Confined Analytical Functions]. Moscow, MISI im V.V. Kuybysheva Publ., 1981, pp. 12—17. (In Russian)

7. Bezyaev V.I., Konyaev Yu.A. Asimptotika resheniy neavtonomnykh sistem i prilozheniy v kvantovoy mekhanike [Asymptotic Expansions of the Solutions for Nonautonomous Systems and Applications in Quantum Mechanics]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 8, pp. 28—35. (In Russian)

8. Fisher S. and Micchelli C. The n-width of Analytic Functions. Duke Math J. 1980, vol. 47, no. 4, pp. 789—801. DOI: http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-80-04746-8.

9. Bojanov B.D. Best Quadrature Formula for a Certain Class of Analytic Functions. Zastos, Mat. 1974, VXIV, pp. 441—447.

10. Frishter L.Yu. Raschetno-eksperimental'nyy metod issledovaniya NDS sostavnykh konstruktsiy v zonakh kontsentratsii napryazheniy [Computational-Experimental Methods of Stress-Strain State Research of Composite Structures in the Areas of Stress Accumulation]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy* [Construction Mechanics of Engineering Structures and Constructions]. 2008, no. 2, pp. 20—27. (In Russian)

11. Pogosinski W., Shapiro H. On Certain Extremum Problems for Analytic Functions. Acta Math. 1953, vol. 90, pp. 287—318. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/BF02392438.

12. Singer I. Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Berein, Springer — Verlag, 1970, 462 p.

13. Frishter L.Yu., Mozgaleva M.L. Sopostavlenie vozmozhnostey chislennogo i eksperimental'nogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstruktsiy s uchetom ikh geometricheskoy nelineynosti [Comparing the Possibilities of Numerical and Experimental Modeling of the Stress-Strain State of Structures with Account for their Geometrical Nonlinearity]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010, vol. 6, no. 1—2, pp. 221—222.

14. Bakhvalov N.S. Ob optimal'nosti lineynykh metodov priblizheniya operatorov na vypuklykh klassakh funktsiy [On Optimal Linear Approximation Methods of the Operators on Functions of Convex Class]. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computing Mathematics and Mathematical Physics]. 1971, no. 4 (11), pp. 1014—1018. (In Russian)

15. Micchelli C., Rivlin T. A Survey of Optimal Recovery. Optimal Estimation in Approximation Theory. N.Y., Plenum press., 1977, pp. 1—54. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-2388-4_1.

16. Shirinov M.I., Khajrullin R.Z. A Control System for Goods Delivery with the Use of Intermediate Warehouses. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* [News of the Russian Academy of Sciences. Theory and Management Systems]. 2002, no. 5, pp. 146—152.

17. Robinson R. Analytic Functions in Circular Rings. Duke Math J. 1843, vol. 10, no. 2, pp. 341—354. DOI: http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-43-01031-2.

18. Smirnov M.I., Khayrullin R.Z. Matematicheskie modeli, ispol'zuemye v sisteme dostavki tovarov avtotransportom «Dispetcher» [Mathematical Models Used in the Goods Delivery System by the Transport “Dispetcher”]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints]. 2002, no. 13, p. 22. (In Russian)

19. Duren P.L. The Theory of H_p Spaces. N.Y., Acad. Press. 1970, pp. 1—258.

20. Kahane J.P. Best Approximation in L1(T). Bull. Amer. Math. Soc. 1874, vol. 80, pp. 788—804.

Received in May 2015.

Об авторе: **Овчинцев Михаил Петрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, 6714543@rambler.ru.

About the author: **Ovchintsev Mikhail Petrovich** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; 6714543@rambler.ru.

Для цитирования:

Овчинцев М.П. Конформная инвариантность задач оптимального восстановления производных от ограниченных аналитических функций // Строительство: наука и образование. 2015. № 2. Ст. 1. Режим доступа: http://nso-journal.ru.

For citation:

Ovchintsev M.P. Konformnaya invariantnost' zadach optimal'nogo vosstanovleniya proizvodnykh ot ogranichennykh analiticheskikh funktsiy [Conformal Invariance of the Optimal Renewal Tasks of the Derivative from the Confined Analytic Functions]. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2015, no. 2, paper 1. Available at: http://www.nso-journal.ru. (In Russian)