

## Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой

М.Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ» (НИУ «МЭИ»),  
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Предложена схема плоской симметричной статически определимой балочной фермы с прямолинейным нижним поясом, стойками, разнонаправленными раскосами и полигональным очертанием верхнего пояса. Пояса фермы прямолинейные, шарниры идеальные. Ферма относится к классу регулярных ферм, имеющих периодические ячейки. Опорные стержни приняты недеформируемыми. Ферма равномерно нагружена по узлам нижнего пояса.

**Материалы и методы.** Поставлена задача вывода зависимости прогиба фермы от числа панелей в пролете. Прогиб получается по формуле Максвелла – Мора в предположении, что все стержни имеют одинаковую жесткость. Усилия в стержнях конструкции от действующей равномерной нагрузки и от единичной вертикальной в середине пролета определяются методом вырезания узлов. Матрица системы линейных уравнений равновесия узлов составляется из косинусов усилий с осями координат. Для составления системы уравнений и ее решения используется программа символьной математики Maple. Для получения общей формулы решается ряд задач ферм с числом панелей от 2 до 29. Последовательности коэффициентов формулы прогиба имеют общие члены, для которых также методами системы Maple с использованием специализированных операторов составляются однородные рекуррентные уравнения.

**Результаты.** Решения рекуррентных уравнений имеют форму полиномов с коэффициентами, зависящими от четности числа панелей, и содержат тригонометрические функции. Построены и проанализированы графики полученных решений. Отмечаются характерные для подобных ферм скачки прогиба и их немонотонный характер. Показано, что при фиксированной, не зависящей от числа панелей, длине пролета и суммарной нагрузке относительный прогиб с увеличением числа панелей сначала падает, затем меняется мало.

**Выводы.** Методами системы Maple получено асимптотическое свойство решения: найдена наклонная асимптота. Угол наклона вычислен с использованием аналитических возможностей Maple. Выведена простая формула для горизонтального смещения подвижной опоры от действия нагрузки. Зависимость оказывается монотонной. Высота фермы входит в знаменатель формулы.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ферма, точное решение, прогиб, индукция, Maple

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. Т. 9. Вып. 1. Ст. 1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1

## Analysis of the deflection of a truss with a decorative lattice

Mikhail N. Kirsanov

National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI),  
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation

### ABSTRACT

**Introduction.** A scheme is proposed for a planar symmetric statically determinate beam truss with a rectilinear lower belt, struts, multidirectional braces and a polygonal outline of the upper belt. The belts of the truss are rectilinear, the hinges are ideal. The truss belongs to the class of regular trusses having periodic cells. The supporting rods are not deformable. The truss is evenly loaded around the nodes of the lower belt.

**Materials and methods.** The task is to deduce the dependence of the deflection of the truss on the number of panels in the span. The deflection is obtained from the Maxwell-Mora formula under the assumption that all the rods have the same rigidity. Forces in the structural rods from the effective uniform load and from the unit vertical in the middle of the span are determined by the method of cutting the nodes. The matrix of the system of linear equations of node equilibrium is made up of the cosines of the forces with the coordinate axes. To compile a system of equations and solve it, the program of symbolic mathematics Maple is used. To obtain the general formula, a number of problems of trusses with a number of panels from 2 to 29 are solved. Sequences of the coefficients of the deflection formula have common terms for which homogeneous recurrence equations are also compiled using the methods of the Maple system using specialized operators.

**Results.** The solutions of recurrence equations have the form of polynomials with coefficients that depend on the parity of the number of panels and contain trigonometric functions. The graphs of the solutions obtained are constructed and analysed. Sharp changes of deflection characteristic for such truss and their non-monotonic character are noted. It is shown that for a fixed, independent on the number of panels, length of the span and the total load, the relative deflection with increasing number of panels first decreases, then varies little.

**Conclusions.** The asymptotic property of the solution is obtained by the methods of the Maple system: an inclined asymptote is found. The slope is calculated using the analytical capabilities of Maple. A simple formula is derived for the horizontal displacement of the mobile support from the action of the load. The dependence is monotonic. The height of the truss is included in the denominator of the formula.

**KEYWORDS:** truss, exact solution, deflection, induction, Maple

**FOR CITATION:** Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a truss with a decorative lattice. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2019; 9(1):1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1 (rus.).

## ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] Р.Дж. Хатчинсон и Н.Э. Флек объявили «охоту» на схемы статически определимых регулярных ферм. Если не ограничиваться только простыми схемами балочных ферм с треугольной или прямоугольной решеткой, то цель поиска таких схем очевидна и имеет практический смысл. Для разных целей в строительстве и машиностроении требуются фермы с различными свойствами. Как правило, основой всех используемых на практике ферм являются статически определимые конструкции, к которым иногда добавляются какие-либо дополнительные элементы, делающие схему статически неопределимой, или идеальные шарниры заменяются жесткими соединениями. При этом свойство базовой статически определимой схемы является определяющим в статическом и динамическом расчетах.

С тех пор, как была объявлена «охота», различными авторами были предложены различные схемы как плоских [3–6], так и пространственных [7, 8] ферм, для которых методом индукции найдены решения задачи о прогибе в зависимости от числа панелей. Хотя эти решения были найдены с использованием системы компьютерной математики Maple, очевидно вполне возможно использовать и другие компьютерные системы. Главное требование для этих программ — наличие операторов для нахождения общих членов последовательностей. Такие последовательности возникают при обобщении методом индукции ряда частных решений для ферм с разным числом панелей (или ячеек периодически) на произвольное число панелей.

Аналитические зависимости усилий и деформаций ферм имеют не только теоретическое, но и практическое значение как для оценки проектов конструкций, так и при исследовании характеристик существующих ферм. Примерами аналитических расчетов могут быть работы [9–16], где даны достаточно простые формулы для расчета различных арочных ферм, и [17–21] — решетчатых.

## СХЕМА ФЕРМЫ. МЕТОД РАСЧЕТА

Предлагается схема симметричной конструкции (рис. 1). Число панелей в половине пролета равно  $n$ . Ферма содержит  $s = 6n + 1$  шарнирных узлов и  $m = 12n + 2$  — стержней. В число стержней включены и три стержня, моделирующие опоры. Нагрузка приложена равномерно по узлам нижнего пояса. В ферме  $4n - 2$  стержня длиной  $a$  в верхнем и нижнем поясе,  $2n - 1$  стоек высотой  $b$ ,  $4n$  раскосов длиной  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $2n$  раскосов длиной  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

При вычислении прогиба используется интеграл Мора. Для этого потребуются символьные выражения для усилий в стержнях, которые получим по программе [3]. Основой программы является метод вырезания узлов. Интеграл Мора в данном случае имеет вид:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i N_i l_i / (EF).$$

Введены стандартные обозначения:  $S_i$  — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки;  $N_i$  — усилия в стержнях от действия единичной (безразмерной) вертикальной силы в середине пролета;  $l_i$  — длины стержней;  $EF$  — жесткость стерж-

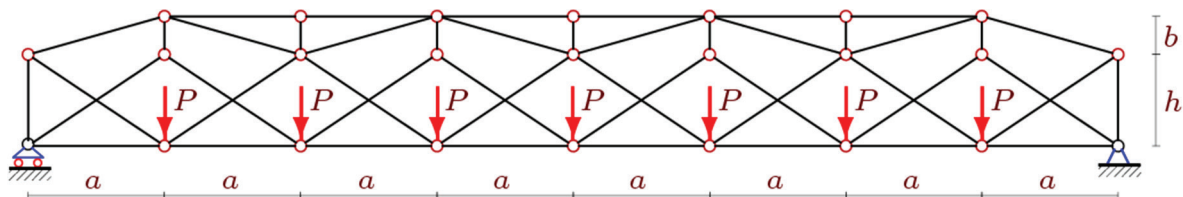


Рис. 1. Ферма,  $n = 4$

ней. Усилия трех жестких опорных стержней в сум-  
му не входят.

Пользуясь алгоритмом [3], предназначенным  
для системы компьютерной математики, например,  
Maple, составляем матрицу косинусов направляю-  
щих углов усилий. В программу вводятся коорди-  
наты узлов. Приведем фрагмент кода на языке Maple:

```
> for i to 2*n+1
do
  x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0;
  x[i+2*n+1]:=x[i];y[i+2*n+1]:=h;
od:
> for i to 2*n-1
do
  x[i+4*n+2]:=a*i; y[i+4*n+2]:=b+h;
od:
```

Схема соединений стержней и шарниров ре-  
шетки фермы задается векторами  $\bar{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , со-  
ответствующими стержням. Компоненты этих век-  
торов определяют номера шарниров по их концам.

В системе Maple эти векторы, соответствую-  
щие нижнему поясу и раскосам длиной  $c$ , име-  
ют вид:

```
> for k to 2*n
do
  R[k]:=[k,k+1];
  R[k+2*n+2]:=[k,k+2*n+2];
  R[k+4*n+2]:=[k+1,k+2*n+1];
od:
```

Раскосы длиной  $d$  в верхнем ряду решетки:

```
> for k to n
do
  R[k+6*n+2]:=[2*k+2*n,2*k+4*n+1];
  R[k+7*n+2]:=[2*k+2*n+2,2*k+4*n+1];
od:
```

Верхний пояс фермы:

```
> for k to 2*n-2
do
  R[k+8*n+2]:=[k+4*n+2,k+4*n+3];
od:
```

Стойки:

```
> for k to 2*n-1
do
  R[k+10*n]:=[k+2*n+2,k+4*n+2];
od:
```

Два боковых стержня в верхнем поясе:

```
> R[2*n+1]:=[1,2*n+2];
```

```
R[2*n+2]:=[2*n+1,4*n+2];
```

По данным координат и структуры решетки  
формируется матрица системы линейных урав-  
нений:

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

В результате решения полученной системы  
в символьной форме получаем усилия в стержнях  
фермы. Обозначено:  $\bar{S}$  — вектор усилий в стержнях  
фермы (включая опорные);  $\bar{B}$  — вектор нагрузок.  
Значения горизонтальных нагрузок, приложенные

к узлу  $i$ , записываются в нечетные элементы  $B_{2i-1}$ ,  
вертикальные — в четные  $B_{2i} = P$ ,  $i = 2, \dots, 2n$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Последовательный расчет ферм с увеличиваю-  
щимся от 2 до 28 числом панелей  $h = b$  дает резуль-  
тат вида:

$$\Delta = P \frac{A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3}{2EFnh^2}. \quad (1)$$

Для определения коэффициентов  $A_n$ ,  $C_n$  и  $H_n$   
оператор `rgf_findrecur` системы Maple дает рекур-  
рентные уравнения для членов соответствующих  
последовательностей. Для коэффициентов 4, 43,  
176, 613, 1500, 3391, 6528, 12 065, ..., 4 265 045 при  
 $a^3$  имеем уравнение:

$$\begin{aligned} A_n = & 2A_{n-1} + A_{n-2} - 4A_{n-3} + 3A_{n-4} - \\ & - 2A_{n-4} - 2A_{n-5} - 3A_{n-6} + \\ & + 8A_{n-7} - 3A_{n-8} - 2A_{n-9} + 3A_{n-10} - \\ & - 4A_{n-11} + A_{n-12} + 2A_{n-13} - A_{n-14}. \end{aligned}$$

Для решения этого уравнения привлекаем опе-  
ратора `rsolve`:

$$\begin{aligned} A_n = & (5n^5 - (3\cos 2\varphi + 11)n^3 + \\ & + (27 - 24\cos \varphi - 3\cos 2\varphi)n / 2 + 12\sin \varphi) / 24, \end{aligned}$$

где  $\varphi = \pi n / 2$ . Выражения для других коэффициен-  
тов выводятся аналогично:

$$\begin{aligned} H_n = & 2(1 - \cos \varphi)n^2 + \\ & + (2\sin \varphi - 2\cos \varphi + \cos 2\varphi + 1)n + 2\sin \varphi, \\ C_n = & 2n^3 + (3\cos 2\varphi - 8\cos \varphi + 5)n + 8\sin \varphi / 4. \end{aligned}$$

Не менее важной характеристикой деформа-  
тивности балочной фермы является горизонтальное  
смещение подвижной опоры от действия нагрузки.  
Если, пользуясь методом индукции, рассчитать эту  
величину для рассматриваемой фермы, то получит-  
ся следующая простая зависимость

$$\delta = Pa^2 n(n^2 - 1) / (3hEF).$$

В отличие от решения (1) здесь зависимость от  
числа панелей — монотонная.

## АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Если проследить зависимость прогиба от чис-  
ла панелей при фиксированной длине пролета  $L =$   
 $= 2an = 80$  м и фиксированной суммарной нагрузке  
 $P_s = (2n - 1)P$ , то можно заметить немонотонность  
изменения относительного безразмерного прогиба  
 $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$  от числа панелей и выход кривых  
на некоторую постоянную величину (рис. 2). В дей-  
ствительности горизонтальной асимптоты здесь  
нет. Есть наклонная асимптота, которую легко вы-  
числить, пользуясь аналитическими возможностями  
Maple,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (8L)$ .

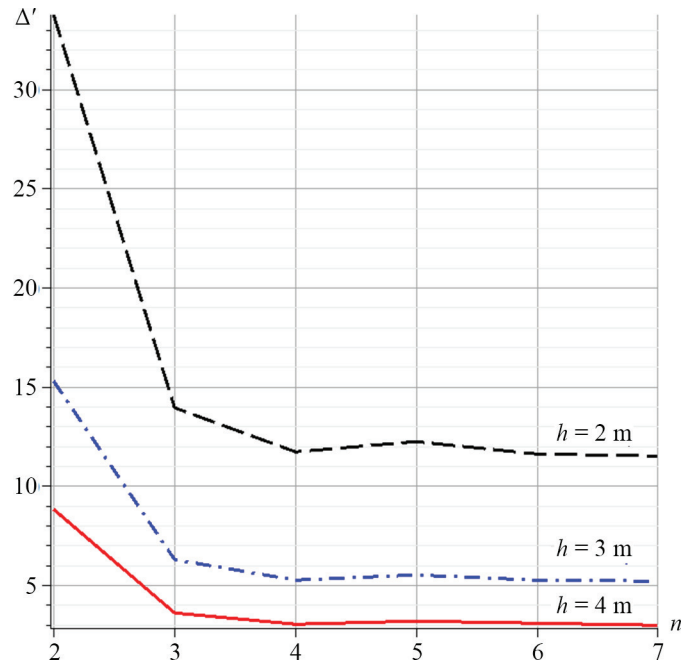


Рис. 2. Относительный прогиб фермы в зависимости от числа панелей

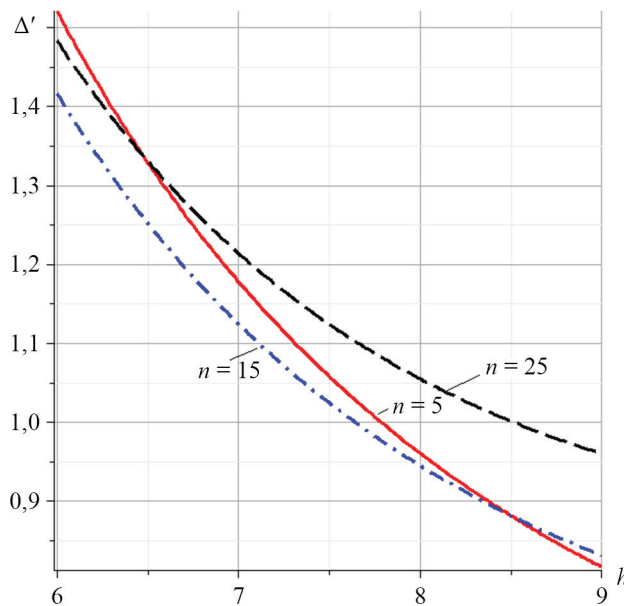


Рис. 3. Зависимость относительного прогиба от высоты фермы

Кроме того, как и следовало ожидать, увеличение высоты фермы приводит к увеличению ее жесткости. Более точно это можно проследить на графике зависимости прогиба от высоты, построенного при тех же предположениях о нагрузке и длине пролета, что и предыдущий график (рис. 3).

На этих графиках интересно отметить точки самопересечения кривых, показывающих неоднозначность выбора числа панелей. При  $h = 8,5$  м, например, при  $n = 5$  и  $n = 15$  относительный прогиб одинаков.

## ВЫВОДЫ

Предложенная схема фермы имеет достаточно сложную решетку. При этом при равномерной нагрузке по нижнему поясу удалось получить точное решение для прогиба, справедливое для любого числа панелей. Попытки решить эту задачу для нагрузки по верхнему поясу были не столь удачны. Длина последовательности, позволяющая найти общий ее член, оказалась слишком большой, а итоговые формулы для прогиба — громоздкими. За-

метим, что по сравнению с большинством подобных решений полученное решение также заметно сложнее. Минимальная длина рекуррентных последовательностей обычно не более 12, здесь же она равна 28.

Полученные формулы удобно использовать для проверки решений, полученных численно

в специализированных пакетах [22, 23], а также для приближенной оценки и оптимизации [24, 25] проектируемых сооружений.

Обзоры некоторых работ по применению метода индукции в среде компьютерной математики Maple для расчета плоских ферм можно найти в трудах [10, 26].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM*. 2005. Vol. 85. Issue 9. Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
2. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
3. *Kirsanov M.* An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. Vol. 1. Issue 3. Pp. 14–17. DOI: 10.23968/2500-0055-2016-1-3-14-17
4. *Kirsanov M.N.* A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2018. No. 1 (37). Pp. 92–99.
5. *Kirsanov M.N.* The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods truss «Molodechno» with an arbitrary number of panels // *Magazine of Civil Engineering*. 2016. Vol. 61. Issue 1. Pp. 33–41. DOI: 10.5862/mce.61.4
6. *Kirsanov M.N., Zaborskaya N.* Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. Pp. 61–67. DOI: 10.18720/MCE.71.7
7. *Kirsanov M.N.* The deflection of spatial coatings with periodic structure // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. No. 8. Pp. 58–66. DOI: 10.18720/MCE.76.6
8. *Kirsanov M.N.* Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52–58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
9. *Ларичев С.А.* Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. 2015. Т. 1. С. 4–8.
10. *Осадченко Н.В.* Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // *Строительная механика и конструкции*. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
11. *Belyankin N.A., Boyko A.Y., Kirsanov M.N.* The derivation of the formula for arch deflection by the method of double induction in the Maple system // *Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии* : Международный научный семинар GRACOS-17. Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 120–123.
12. *Kirsanov M.N., Lafickova M.G., Nikitina A.S.* An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels // *Science Almanac*. 2017. No. 4–3 (30). Pp. 205–208.
13. *Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.* The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // *Science Almanac*. 2017. No. 2–3 (28). Pp. 268–271.
14. *Курсанов М.Н.* Индуктивный анализ деформации арочной фермы // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Vol. 14. Issue 1. Pp. 64–70. DOI: 10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
15. *Курсанов М.Н.* Формулы для расчета прогиба арочной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2018. Т. 1. № 16. С. 7–11.
16. *Arutyunyan V.B.* Calculation of the deflection of a statically indeterminate beam truss // *Postulat*. 2018. № 6 (32). С. 42.
17. *Kirsanov M.N.* Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016. No. 1 (29). Pp. 84–105.
18. *Domanov E.V.* The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels // *Postulat*. 2018. No. 6. P. 67.
19. *Осадченко Н.В.* Расчет прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролетами // *Постулат*. 2017. № 12. С. 28.
20. *Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.* The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load // *Postulat*. 2018. No. 3. P. 22.
21. *Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.* Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss // *Postulat*. 2018. No. 5.
22. *Guo Y.L., Chen H., Pi Y.L.* In-plane failure mechanisms and strength design of circular steel planar tubular Vierendeel truss arches // *Engineering Structures*. 2017. Vol. 151. Pp. 488–502. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.08.055

23. Guo Y., Zhao S.Y., Dou C. Out-of-plane elastic buckling behavior of hinged planar truss arch with lateral bracings // Journal of Constructional Steel Research. 2014. Vol. 95. Pp. 290–299. DOI: 10.1016/j.jcsr.2013.12.013

24. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design optimization of truss bridge structures of composite materials // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46. Issue 1. Pp. 46–52. DOI: 10.3103/s1052618817010149

25. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Issue 18–19. Pp. 2508–2524. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.05.009

26. Tinkoff D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection // Magazine of civil Engineering. 2015. Vol. 57. Issue 5. Pp. 66–73. DOI: 10.5862/mce.57.6

Поступила в редакцию 27 июня 2018 г.

Принята в доработанном виде 25 октября 2018 г.

Одобрена для публикации 27 декабря 2018 г.

ОБ АВТОРЕ: Кирсанов Михаил Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, Национальный исследовательский университет «МЭИ» (НИУ «МЭИ»), 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, c216@ya.ru.

## INTRODUCTION

In papers [1, 2] R.G. Hutchinson and N.A. Fleck proclaimed “wanted” schemes of statically determinate regular trusses. Should one not be going to confine oneself just to simple schematics of beam trusses with triangular or rectangular grids, then the goal of the search for such schemes gets obvious as having applied sense. For various purposes, trusses with different properties are required in construction and machine-building. As a rule, the basis of all practically applicable truss structures is constituted by statically determinate structures to which sometimes additional elements are added making the structure statically indeterminate, or ideal hinges are replaced by rigid joints. Thereby, the property of a basic statically determinate scheme is determining both in static and dynamic calculations.

Since the call was issued, numerous authors have suggested various schemes of both planar [3–6] and spatial [7, 8] trusses for which solutions of the deflection problem were found by induction dependent on the number of panels. Whereas those solutions have been found by using Maple computer maths system, it is evident that it is also well possible to use other computer systems. It is the basic requirement for such software that operators are introduced to find common terms of

the sequences. Such sequences occur during generalization by induction of a number of particular solutions for trusses with different numbers of panels (or periodical cells) to the arbitrary panel number.

The analytical force-strain dependencies of trusses have not only theoretical, but also practical meaning both for structural design assessments and for studies of the specifications of existing trusses. Good examples of analytical calculations could be papers [9–16] with rather simple formulae for calculation of various arch trusses and [17–21] grid-type trusses.

## TRUSS SCHEMATICS CALCULATION METHOD

A symmetrical structural scheme is suggested (fig. 1). The number of panels over half the span is  $n$ . The truss contains  $s = 6n + 1$  hinge nodes and  $m = 12n + 2$  rods. The number of the rods includes also three rods which model the supports. The load is applied uniformly to the lower belt nodes. In truss 4, there are  $n - 2$  rods of  $a$  length in the upper and the lower belt,  $2n - 1$  struts of height  $b$ ,  $4n$  braces of  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  length and  $2n$  braces of  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$  length.

During the deflection calculation, Mora integral is used. For this purpose, symbolic expressions of

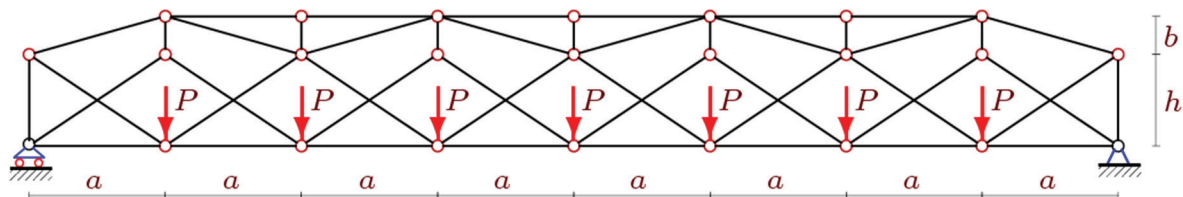


Fig. 1. Truss,  $n = 4$

rod forces are necessary, obtainable by means of program [3]. The program is based on the method of cutting the nodes. The Mora integral has in this case the following appearance:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i N_i l_i / (EF).$$

Standard designations are introduced:  $S_i$  as truss rod forces by external load;  $N_i$  as rod forces by unit (dimensionless) vertical force in the middle of the span;  $l_i$  as rod length,  $EF$  as rod rigidity. The forces of the three rigid support rods are excluded from the sum.

Using algorithm [3] for a computer maths system, e.g. Maple, we compile a matrix of cosines of the guiding force angles. The coordinates of the nodes are input into the program. Below, is a code fragment in Maple language:

```
> for i to 2*n+1
do
  x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0;
  x[i+2*n+1]:=x[i];y[i+2*n+1]:=h;
od:
> for i to 2*n-1
do
  x[i+4*n+2]:=a*i; y[i+4*n+2]:=b+h;
od:
```

The connections configuration of the rods and the hinges of the truss grid is defined by  $\bar{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  vectors, corresponding to the rods. The components of these vectors define the numbers of the hinges by their ends.

In Maple system, these vectors corresponding to the lower belt and the braces of  $clength$ , have the following appearance:

```
> for k to 2*n
do
  R[k]:=[k,k+1];
  R[k+2*n+2]:=[k,k+2*n+2];
  R[k+4*n+2]:=[k+1,k+2*n+1];
od:
```

The braces of  $d$  length in the upper grid row:

```
> for k to n
do
  R[k+6*n+2]:=[2*k+2*n,2*k+4*n+1];
  R[k+7*n+2]:=[2*k+2*n+2,2*k+4*n+1];
od:
```

Upper truss belt:

```
> for k to 2*n-2
do
  R[k+8*n+2]:=[k+4*n+2,k+4*n+3];
od:
```

Struts:

```
> for k to 2*n-1
do
  R[k+10*n]:=[k+2*n+2,k+4*n+2];
od:
```

Two lateral rods in the upper belt:

```
> R[2*n+1]:=[1,2*n+2];
R[2*n+2]:=[2*n+1,4*n+2];
```

Based on the coordinates and the grid structure data, a matrix of a system of linear equations is generated:

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

As a result of the solution of the obtained system in symbolic form, we obtain the rod forces of the truss. Designations:  $\bar{S}$  as vector of the truss rod forces (including support rods),  $\bar{B}$  as load vector. The values of the horizontal loads applied to the node  $i$ , are entered as non-parity elements  $B_{2i-1}$ , whereas the vertical ones are entered as parity elements  $B_{2i} = P$ ,  $i = 2, \dots, 2n$ .

## CALCULATION RESULTS

A serial calculation of the trusses with a number of panels growing from 2 to 28  $h = b$  gives a result of the following appearance:

$$\Delta = P \frac{A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3}{2EFnh^2}. \quad (1)$$

For determining of the coefficients  $A_n$ ,  $C_n$  and  $H_n$ , the operator `rgf_findrecur` of Maple system gives recurrent equations for members of the relevant sequences. For the coefficients 4, 43, 176, 613, 1500, 3391, 6528, 12 065, ..., 4 265 045 at  $a^3$  we obtain the following equation:

$$\begin{aligned} A_n = & 2A_{n-1} + A_{n-2} - 4A_{n-3} + 3A_{n-4} - \\ & - 2A_{n-4} - 2A_{n-5} - 3A_{n-6} + \\ & + 8A_{n-7} - 3A_{n-8} - 2A_{n-9} + 3A_{n-10} - \\ & - 4A_{n-11} + A_{n-12} + 2A_{n-13} - A_{n-14}. \end{aligned}$$

To solve this equation, we involve the operator `rsolve`:

$$\begin{aligned} A_n = & (5n^5 - (3\cos 2\varphi + 11)n^3 + \\ & + (27 - 24\cos \varphi - 3\cos 2\varphi)n / 2 + 12\sin \varphi) / 24, \end{aligned}$$

where  $\varphi = \pi n / 2$ . Expressions for other coefficients are derived in a similar way:

$$\begin{aligned} H_n = & 2(1 - \cos \varphi)n^2 + \\ & + (2\sin \varphi - 2\cos \varphi + \cos 2\varphi + 1)n + 2\sin \varphi, \\ C_n = & 2n^3 + (3\cos 2\varphi - 8\cos \varphi + 5)n + 8\sin \varphi / 4. \end{aligned}$$

No less important deformation property of the beam truss is the horizontal displacement of the mobile support by the load. If, by induction, we calculate this value for the considered truss, the following simple dependency is obtained

$$\delta = Pa^2 n(n^2 - 1) / (3hEF).$$

By contrast to solution (1), the dependency on the number of panels therein is monotonic.

**SOLUTION ANALYSIS**

If we trace the dependency of the deflection on the number of panels within a fixed length of the span  $L = 2an = 80$  m and a fixed total load  $P_s = (2n - 1)P$ , then we could notice the non-monotonic change of the relative dimensionless deflection  $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$  along with the change of the panels number and the curves coming out to a certain constant value (fig. 2). Actually, here is no horizontal asymptote. There is an inclined asymptote which is easily calculated using the analytical capabilities of Maple:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (8L)$ .

Additionally, as anticipated, increased truss height leads to the increase of the truss rigidity. It could be more precisely observed on the deflection vs. height diagram, construed under assumptions of the load and the span length similar to those of the previous diagram (fig. 3).

In these diagrams, it could be interesting to mark the self-crossing points of the curves which demonstrate the ambiguity of the panels number selection. At  $h = 8.5$  m, e.g. at  $n = 5$  and  $n = 15$ , the relative deflection is the same.

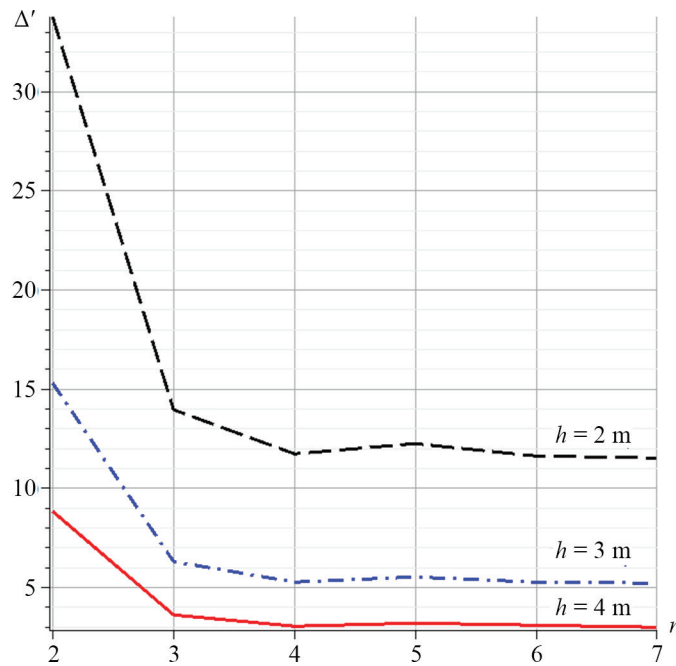


Fig. 2. Relative deflection of a truss dependent upon the panels number

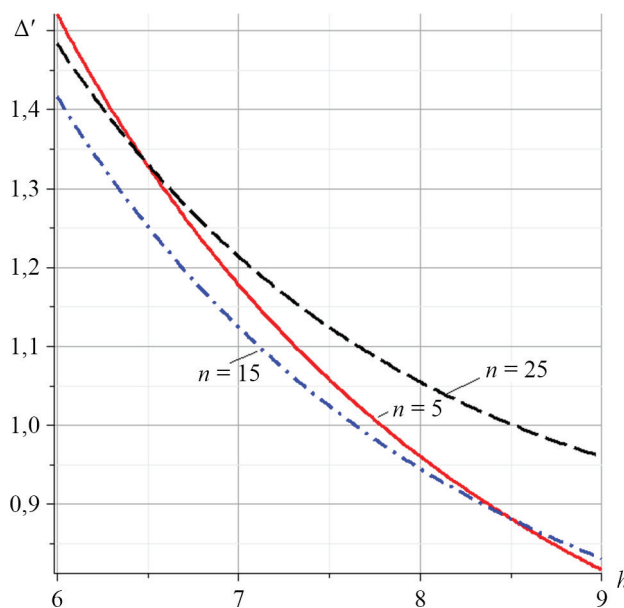


Fig. 3. Relative deflection vs. truss height



## CONCLUSIONS

The suggested truss schematics features a rather complex grid. Thereby, at a uniform load throughout the lower belt, it was managed to obtain an exact solution for the deflection, applicable for any number of panels. Attempts to solve this problem for the load of the upper belt were scarcely that success. The length of the sequence allowing for its common term appeared to be excessively large, whereas the final formulae appeared to be tedious. It should be noted that compared

with the majority of similar solutions, the obtained one is distinctively more complex. The minimum length of recurrent sequences generally does not exceed 12, whereas it equals to 28 here.

The obtained formulae were comfortably used for checking solutions obtained numerically in specialized software packages [22, 23], as well as for approximate evaluation and optimizing [24, 25] facilities under design.

Overviews of some papers on the induction method in Maple computer maths medium for calculation of planar trusses could be found in [10, 26].

## REFERENCES

1. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM*. 2005; 85(9):607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
2. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4):756-782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
3. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016; 1(3):14-17. DOI: 10.23968/2500-0055-2016-1-3-14-17
4. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2018; 1(37):92-99.
5. Kirsanov M.N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods truss “Molodechno” with an arbitrary number of panels. *Magazine of Civil Engineering*. 2016; 61(1):33-41. DOI: 10.5862/mce.61.4
6. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017; 3:61-67. DOI: 10.18720/MCE.71.7
7. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Magazine of Civil Engineering*. 2018; 8:58-66. DOI: 10.18720/MCE.76.6
8. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016; 4:52-58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
9. Larichev S.A. Inductive analysis of the influence of the building lift on the rigidity of a spatial beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. 2015; 1:4-8. (rus.).
10. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems on the deflection of flat arches of arched type. *Construction mechanics and structures*. 2018; 1(16):12-33. (rus.).
11. Belyankin N.A., Boyko A.Y., Kirsanov M.N. The derivation of the formula for arch deflection by the method of double induction in the Maple system. *Nonlinear models in mechanics, statistics, field theory and cosmology : International scientific seminar. GRACOS-17*. Kazan, Publishing House of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, 2017; 120-123.
12. Kirsanov M.N., Lafickova M.G., Nikitina A.S. An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels. *Science Almaty*. 2017; 4-3(30):205-208.
13. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. *Science Almaty*. 2017; 2-3(28):268-271.
14. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the deformation of the arched truss. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018; 14(1):64-70. DOI: 10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70 (rus.).
15. Kirsanov M.N. Formulas for calculating the arch of the arch. *Construction mechanics and structures*. 2018; 1(16):7-11. (rus.).
16. Arutyunyan V.B. Calculation of the deflection of a statically indeterminate beam truss. *Postulat*. 2018; 6(32):42.
17. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016; 1(29):84-105.
18. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels. *Postulat*. 2018; 6:67.
19. Osadchenko N.V. Calculation of the deflection of a flat, continuous, statically determinate truss with two spans. *Postulat*. 2017; 12:28. (rus.).
20. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load. *Postulat*. 2018; 3:22.
21. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss. *Postulat*. 2018; 5.

22. Guo Y.L., Chen H., Pi Y.L. In-plane failure mechanisms and strength design of circular steel planar tubular Vierendeel truss arches. *Engineering Structures*. 2017; 151:488-502. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.08.055
23. Guo Y., Zhao S.Y., Dou C. Out-of-plane elastic buckling behavior of hinged planar truss arch with lateral bracings. *Journal of Constructional Steel Research*. 2014; 95:290-299. DOI: 10.1016/j.jcsr.2013.12.013
24. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design optimization of truss bridge structures of composite materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017; 46(1):46-52. DOI: 10.3103/s1052618817010149
25. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation. *International Journal of Solids and Structures*. 2010; 47(18-19):2508-2524. DOI: 10.1016/j.ij-solstr.2010.05.009
26. Tinkoff D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection. *Magazine of Civil Engineering*. 2015; 57(5):66-73. DOI: 10.5862/mce.57.6

Received June 27, 2018

Adopted in a modified form on October 25, 2018

Approved for publication December 27, 2018

ABOUT THE AUTHOR: **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines, **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**, 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation, c216@ya.ru.