

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.074.5

DOI: 10.22227/2305-5502.2025.4.2

## Численное моделирование процесса формоизменения регулярно-стержневой гексагональной решетки при дискретном кинематическом воздействии

Петр Павлович Гайджуров<sup>1</sup>, Надежда Геннадьевна Царитова<sup>2</sup>,  
Никита Аркадьевич Корчагин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Донской государственный технический университет (ДГТУ); г. Ростов-на-Дону, Россия;

<sup>2</sup> Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова;  
г. Новочеркасск, Россия

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Проблема исследования процесса трансформации регулярной стержневой системы из исходного плоского состояния в арочную форму при управляемом кинематическом воздействии базируется на решении геометрически нелинейной задачи строительной механики. В литературе практически отсутствуют сведения о математическом моделировании трансформируемых шарнирно-стержневых систем с учетом формоизменения, в связи с этим актуально направление, связанное с разработкой инженерной методики, расчета геометрически изменяемых конструкций с применением метода конечных элементов.

**Материалы и методы.** Представлены методика конечно-элементного моделирования формоизменения регулярной гексагональной стержневой решетки с использованием упругих шарниров в узловых соединениях балочных элементов и применение процедуры инкрементального кинематического воздействия на контурные узлы. Рассмотрены две модели узловых соединений: обычная (связывающая перемещения и углы поворота узлов элементов решетки с соответствующими узлами площадок соединений) и с упругими шарнирами.

**Результаты.** Особенность предлагаемой модели узловых соединений балочных конечных элементов заключается в введении шести комбинированных элементов с различными значениями коэффициентов линейных и поворотных жесткостей. Приводятся сравнительные результаты вычислительных экспериментов для моделей решеток с упругими шарнирами и без упругих шарниров; результаты моделирования в виде графиков зависимости «стрелы» подъема от числа шагов трансформации для различных значений жесткостей поворотных пружин.

**Выводы.** Предлагаемый прямой инкрементальный алгоритм решения геометрически нелинейной задачи является абсолютно сходящимся. На основании результатов моделирования процесса формоизменения гексагональной решетки может быть спроектирована конструкция шарнирно-стержневого соединения. Рассмотренная трансформация гексагональной решетки представляет определенный интерес как 3D-арт-проект в области архитектуры и дизайна.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** гексагональные решетки, метод конечных элементов, узловые соединения, геометрическая нелинейность, прямой инкрементальный метод

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Гайджуров П.П., Царитова Н.Г., Корчагин Н.А. Численное моделирование процесса формоизменения регулярно-стержневой гексагональной решетки при дискретном кинематическом воздействии // Строительство: наука и образование. 2025. Т. 15. Вып. 4. Ст. 2. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2025.4.2

Автор, ответственный за переписку: Надежда Геннадьевна Царитова, [ncaritova@yandex.ru](mailto:ncaritova@yandex.ru).

## Numerical simulation of the shaping process of a regular-rod hexagonal lattice under discrete kinematic action

Peter P. Gaydzhurov<sup>1</sup>, Nadezhda G. Tsaritova<sup>2</sup>, Nikita A. Korchagin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Don State Technical University (DSTU); Rostov-on-Don, Russian Federation;

<sup>2</sup> Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI); Novocherkassk, Russian Federation

### ABSTRACT

**Introduction.** The problem of studying the process of transformation of a regular rod system from an initial flat state to an arched shape under controlled kinematic action is based on solving a geometrically nonlinear problem of structural mechanics. There is practically no information in the literature on the mathematical modelling of transformable hinge-rod systems, taking into account the shape change, in this regard, the relevant direction is related to the development of engineering techniques for calculating geometrically variable structures using the finite element method.

**Materials and methods.** This paper presents a technique for finite element modelling of the shape of a regular hexagonal rod lattice using elastic hinges in the nodal joints of beam elements and applying the procedure of incremental kinematic

action on contour nodes. Two models of nodal joints are considered: conventional (connecting the displacements and angles of rotation of the nodes of the lattice elements with the corresponding nodes of the joint pads) and with elastic hinges.

**Results.** A feature of the proposed model of nodal joints of beam end elements is the introduction of six combined elements with different values of linear and rotational stiffness coefficients. Comparative results of computational experiments for lattice models with elastic hinges and without elastic hinges are presented. The simulation results are presented in the form of graphs of the dependence of the “boom” of lifting on the number of transformation steps for various stiffness values of rotary springs.

**Conclusions.** The proposed direct incremental algorithm for solving a geometrically nonlinear problem is absolutely convergent. Based on the simulation results of the hexagonal lattice shaping process, the hinge-rod joint structure can be designed. The considered transformation of the hexagonal lattice is of particular interest as a 3D art project in the field of architecture and design.

**KEYWORDS:** hexagonal lattices, finite element method, nodal connections, geometric nonlinearity, direct incremental method

**FOR CITATION:** Gaydzhurov P.P., Tsaritova N.G., Korchagin N.A. Numerical simulation of the shaping process of a regular-rod hexagonal lattice under discrete kinematic action. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2025; 15(4):2. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2025.4.2

Corresponding author: Nadezhda G. Tsaritova, [ncaritova@yandex.ru](mailto:ncaritova@yandex.ru).

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из креативных направлений в современной архитектуре является так называемый кинетический дизайн, основанный на управляемом изменении геометрии конструкции с целью получения требуемых объемно-планировочных решений [1, 2]. К этому стоит добавить формоизменение конструктивных элементов фасадов зданий по схеме оригами. Идея создания подобных строительных сооружений во многом переплетается с техническими решениями в области кинематически изменяемых аэрокосмических систем типа раскрываемых панелей солнечных батарей и крыльев с изменяемой геометрией [3–7]. Также в трансформируемых механических системах важен симбиоз робототехники и биомеханики для проектирования роботов-андроидов [8]. Как правило, исполнительные механизмы современных промышленных роботов совершают большие перемещения в трехмерном пространстве. Следовательно, система дифференциальных уравнений кинестатики, описывающая рабочий цикл робототехнической системы, будет нелинейной. Кроме этого, узловые соединения таких механизмов выполняются в виде шарниров с обратными связями, что существенно усложняет процесс компьютерного моделирования.

Необходимо отметить, что в литературе по строительной механике практически отсутствуют сведения о математическом моделировании трансформируемых шарнирно-стержневых систем с учетом формоизменения. В этой связи актуально направление, связанное с разработкой инженерной методики, расчета геометрически изменяемых конструкций с использованием метода конечных элементов (МКЭ) [9, 10]. Конечно-элементное моделирование стержневых конструкций базируется на применении матрицы жесткости балочного конечного элемента (КЭ) с шестью степенями свободы в узле [11–13]. В рамках линейного анализа перемещения и углы поворота балочного КЭ считаются малыми. Однако известно, что для гибких стержневых систем характерны боль-

шие линейные и угловые перемещения при малых деформациях [14, 15]. В этом случае численное решение геометрически нелинейной задачи строится на базе итерационной процедуры Ньютона – Рафсона и метода «корректирующих дуг», суть которого состоит в адаптивной корректировке величины шага нагружения при приближении и после прохождения точки бифуркации [16, 17].

Упрощенный метод расчета гибких упругих стержней основан на представлении стержня набором прямолинейных балочных КЭ одинаковой длины, соединенных в зонах сопряжения пружинами [3]. Пример балочно-пружинной схемы консольного стержня показан на рис. 1.

Полагается, что между узловым моментом и соответствующим углом поворота существует линейная зависимость:

$$M_i = k\alpha_i; i = 1, 2, 3,$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий в данном случае упругую жесткость шарнира. В работе [3] для расчета гибких стержней в двумерной постановке использован следующий функционал:

$$\Theta = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dx - \sum_i (M_i \alpha_i)_{x=x_i} + \Pi,$$

где  $M$  — изгибающий момент на свободном конце стержня;  $EJ$  — изгибная жесткость стержня;  $M_i$ ,

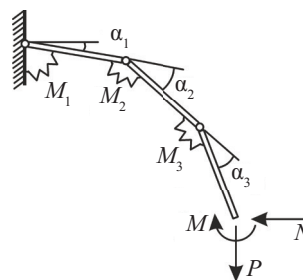


Рис. 1. Балочно-пружинная схема гибкого стержня (рисунок авторов)

$\alpha_i$  — реактивные моменты в пружинах сопряжения и углы поворотов балочных КЭ;  $\Pi$  — работа внешних сил.

При этом считается, что упругая жесткость пружин эквивалентна изгибной жесткости стержня. Представленная концепция деформационного моделирования узкоспециализирована и не может быть напрямую распространена на задачи строительной механики, связанные с исследованием пространственных кинематически трансформируемых стержневых систем.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Конечно-элементное моделирование процесса трансформации регулярной стержневой гексагональной решетки при шаговом смещении контурных узлов в направлении глобальных осей  $X$  и  $Y$  выполнили в среде программного комплекса ANSYS Mechanical [18–20]. Для написания макросов использовали встроенный в ANSYS язык программирования APDL. Каждый стержень решетки и площадки узловое соединение представили в виде одного балочного КЭ.

Рассмотрим две модели узловых соединений:

- обычную, связывающую перемещения и углы поворота узлов элементов решетки с соответствующими узлами площадок соединений;
- с упругими шарнирами, расположенными между узлами элементов решетки и узлами площадок соединений.

Процесс трансформации формы каждого стержня из исходного состояния в конечное представим в виде последовательности шагов. На каждом шаге сначала удаляем предыдущую конечно-элементную

сетку, а затем по откорректированным с учетом полученных перемещений координатам узлов строим новую сетку. При этом топологическая информация о конечно-элементной модели решетки полностью сохраняется. На рис. 2. приведена схема корректировки координат узлов КЭ на  $k$ -м шаге кинематической трансформации.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для демонстрации предлагаемой концепции деформационного формоизменения выполним конечно-элементное моделирование процесса трансформации регулярной стержневой системы из исходного плоского состояния в арочную форму при дискретном кинематическом воздействии. Схема рассматриваемой гексагональной регулярно-стержневой решетки в исходном (начальном) положении показана на рис. 3.

На рис. 3 контрольные значения размеров ячейки решетки в начальном состоянии  $s_{a,b} = 0,966$  м,  $s_c = 1,058$  м; цифрами 1–3 обозначены стержни, для которых вычисляются углы ориентации  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  в процессе формоизменения решетки.

Модель повторяющегося узлового соединения, позволяющая моделировать формоизменение решетки, представлена на рис. 4. Данная модель включает платформу  $t$ , образованную из трех недеформируемых стержневых элементов. В каждой вершине равностороннего треугольника  $t$  между парными узлами  $i, j$  расположены упругие шарниры.

Как показано на рис. 4, каждый упругий шарнир включает три линейных и три поворотных пружины. Для обозначения элементов упругого шар-

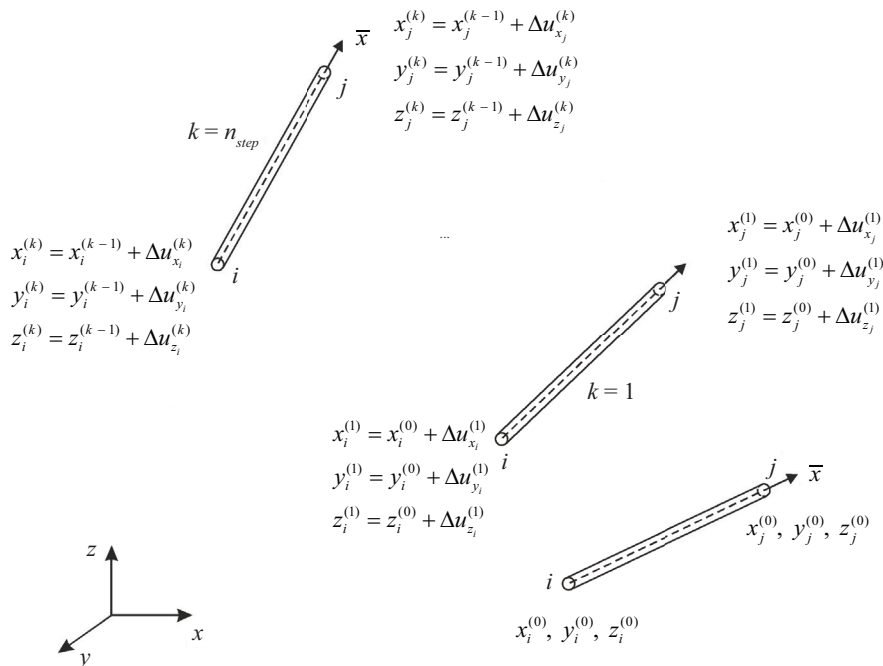


Рис. 2. Схема трансформации геометрии балочного КЭ ( $n_{step}$  — число шагов нагружения) (рисунок авторов)

нира приняты следующие символы:  $k_x, k_y, k_z$  — коэффициенты жесткостей линейных пружин (Н/м), ориентированных вдоль осей  $X, Y, Z$ ;  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$  — соответствующие жесткости поворотных пружин (Н·м/рад). Каждый стержень решетки моделируем одним балочным КЭ.

На рис. 5 приведена расчетная схема решетки, соответствующая синхронному симметричному кинематическому воздействию на узлы с координатами  $x = 0$  и  $x = 9,76$  м. Назначаем следующие параметры для процесса трансформации: стартовое значение «стрель» подъема решетки  $f_s = 0,01$  м; значение шага приращения  $\Delta_x = 0,01$  м; число шагов  $n_{step} = 200$ . Во всех расчетах вводим учет собственного веса конструкции. Отметим, что «стартовое» положение решетки при заданных статических граничных условиях совпадает с первой собственной формой.

Механические константы стержней решетки (алюминиевый сплав): модуль упругости  $E = 6,8 \times 10^4$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,32$ ; плотность  $\rho = 2885$  кг/м<sup>3</sup>. Модуль упругости практически недеформируемых стержней платформы  $E_t = 10^9$  МПа. Стержни решетки (длина 0,4423 м) и узловых платформ (длина 0,1 м) имеют трубчатую форму поперечного сечения с наружным диаметром 0,018 м. Толщина стенки трубы 0,0015 м. Значения коэффициентов жесткости  $k_x, k_y, k_z$  принимаем численно равными величине  $E$ .

Результаты моделирования в виде графиков зависимости «стрель» подъема  $f_s$  от числа шагов трансформации  $i$  для различных значений жестко-

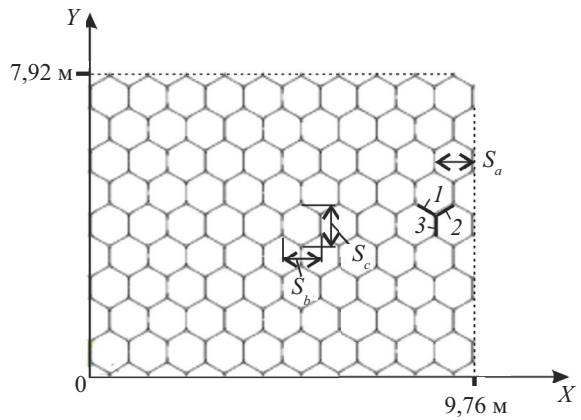


Рис. 3. Схема гексагональной решетки в исходном положении (рисунок авторов)

стей поворотных пружин представлены на рис. 6. На рис. 6 линиям 1–4 соответствуют значения  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$ : 1000, 3000, 5000, 10 000 (Н·м/рад). График, выполненный штриховой линией, соответствует варианту решетки без упругих шарниров. Из приведенных графиков следует вывод о нелинейной зависимости значения  $f_s$  от величины кинематического воздействия на узлы решетки с координатами  $x = 0$  и  $x = 9,76$  м. Конечный арочный вид решетки при  $n_{step} = 200$  для  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$  1000 Н·м/рад и 10 000 Н·м/рад показан на рис. 7.

Графики изменений размеров ячеек в зависимости от шага трансформации приведены на рис. 8.

Для сравнения на рис. 9 показана графическая зависимость  $s_{a,b} \sim i$  для решетки без упругих шар-

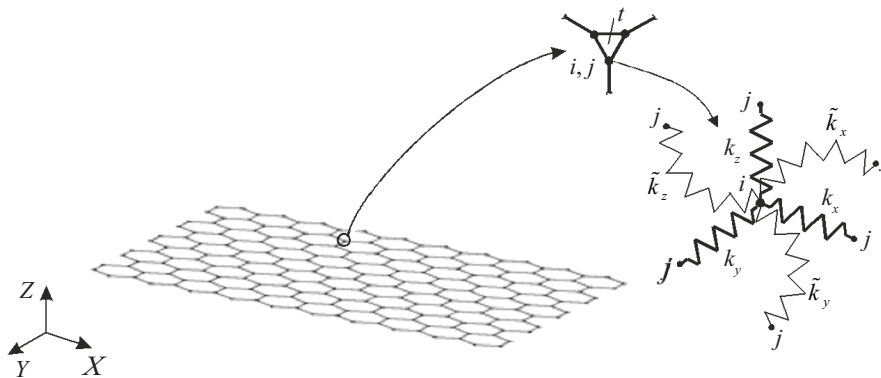


Рис. 4. Схема узлового соединения стержней решетки (рисунок авторов)

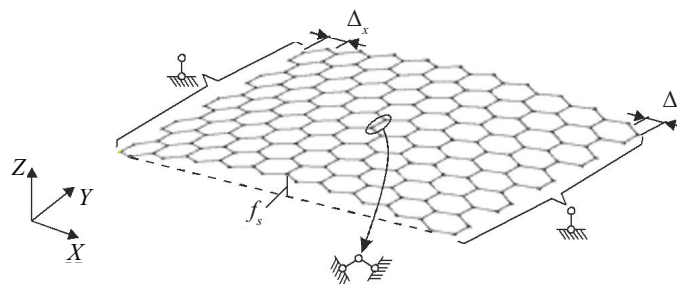


Рис. 5. Расчетная схема, соответствующая симметричному кинематическому воздействию  $\Delta_x$  (рисунок авторов)

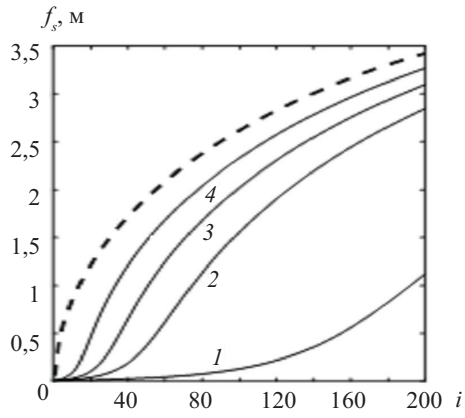
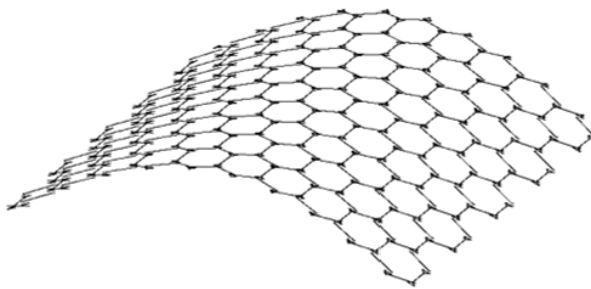
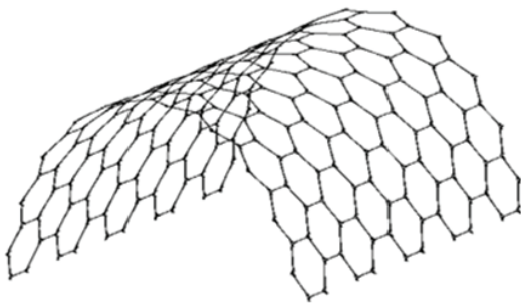


Рис. 6. Графики  $f_s \sim i$  (рисунок авторов)



a



b

Рис. 7. Арочный вид решетки: a —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000$  Н·м/рад; b —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000$  Н·м/рад (рисунок авторов)

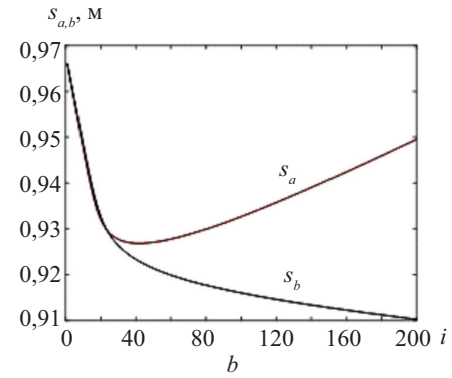
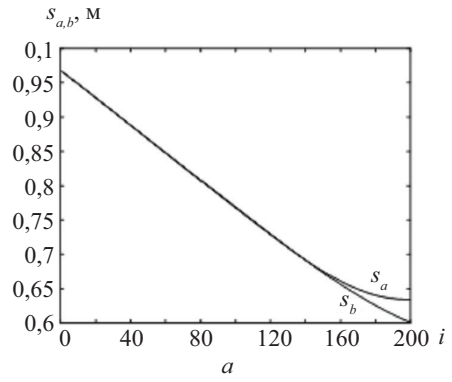


Рис. 8. Графики  $s_{a,b} \sim i$ : a —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000$  Н·м/рад; b —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000$  Н·м/рад

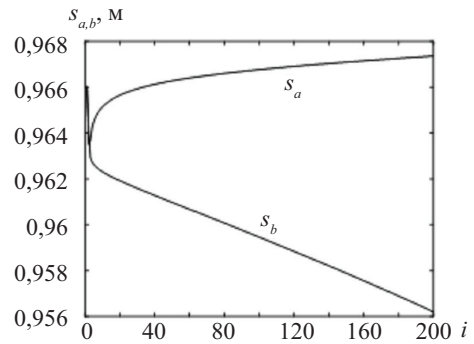


Рис. 9. Графики  $s_{a,b} \sim i$  для решетки без упругих шарниров

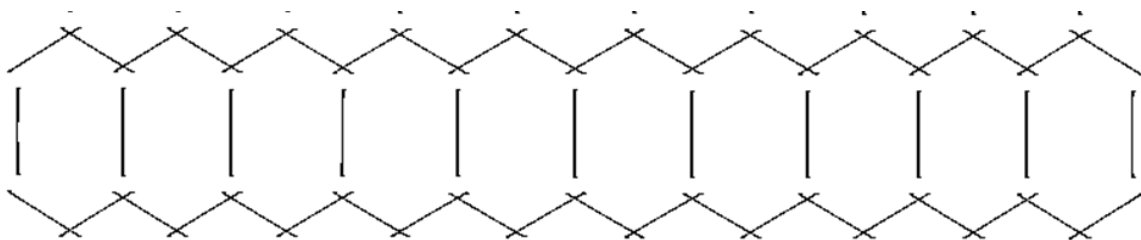


Рис. 10. Фрагмент арочной решетки ( $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000$  Н·м/рад)

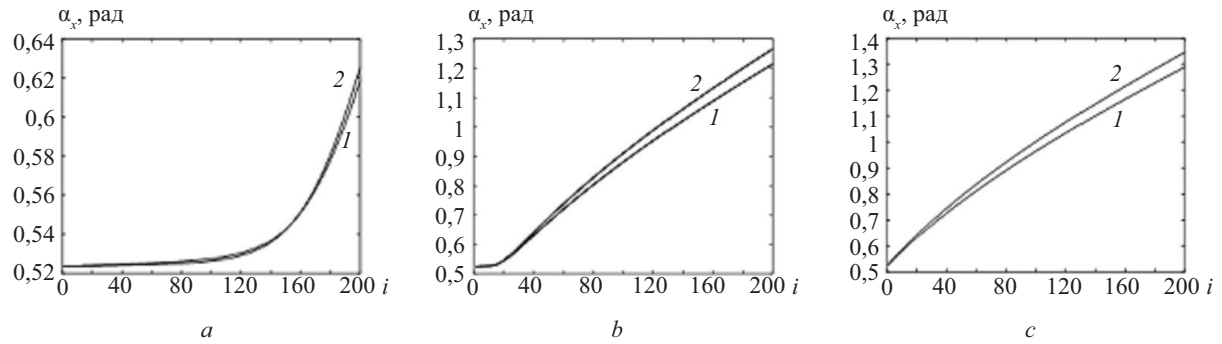


Рис. 11. Графики  $\alpha_x \sim i$ : *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ; *c* — без упругих шарниров

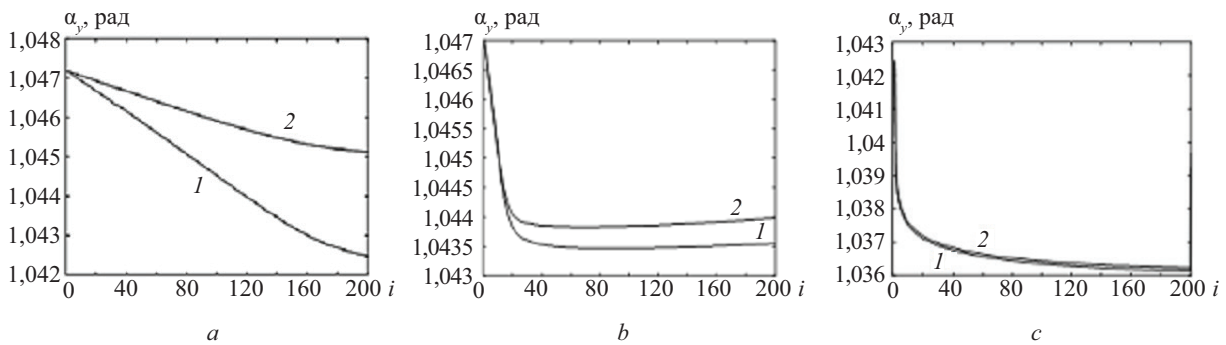


Рис. 12. Графики  $\alpha_y \sim i$ : *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ; *c* — без упругих шарниров

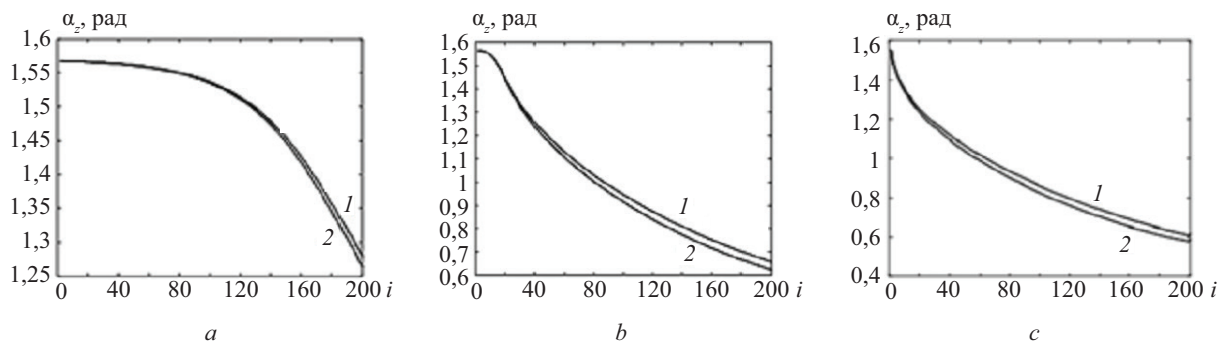


Рис. 13. Графики  $\alpha_z \sim i$ : *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ; *c* — без упругих шарниров

ниров. Из приведенных графиков видно, что максимальное изменение размера ячейки  $s_b$  составляет 0,4 м на рис. 6, *a*; 0,056 м на рис. 6, *b* и 0,01 м на рис. 9. Размер  $s_a$  изменяется соответственно на 0,016 и 0,0014 м. Причем в обоих случаях характер графиков  $s_a \sim i$  качественно совпадает, т.е. в начале трансформации отмечается резкое уменьшение, а затем пологий рост. Как и следовало ожидать, решетка с  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$  является наиболее «гуттаперчевой» при заданном виде кинематического воздействия. На рис. 10 представлена визуализация фрагмента данной решетки при  $n_{step} =$

$= 200$  (показано положение стержневых элементов, примыкающих к опорным узлам).

Следует отметить, что для разработки конструкции узлового соединения гексагональной решетки необходимо иметь данные об изменении ориентации стержней в процессе трансформации. С этой целью было выполнено исследование зависимости углов поворота  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  стержней 1, 2 (рис. 11) от шага трансформации  $i$ . Графики  $\alpha_x \sim i, \alpha_y \sim i, \alpha_z \sim i$  для решеток с упругими шарнирами при значениях параметров  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$  1000 Н·м/рад, 10 000 Н·м/рад, а также решетки без упругих шарниров приведены на рис. 11–13.

Результаты модального анализа

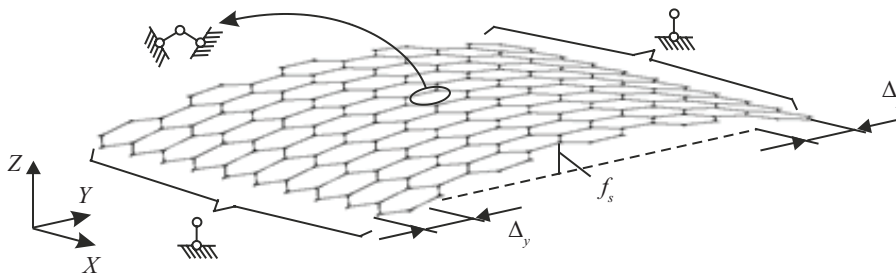
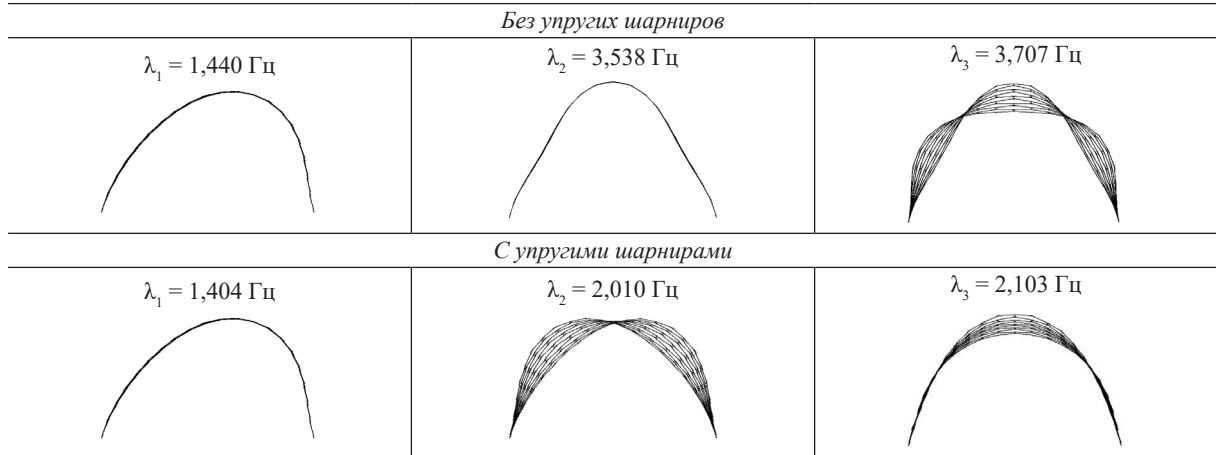


Рис. 14. Расчетная схема, соответствующая симметричному кинематическому воздействию  $\Delta_y$

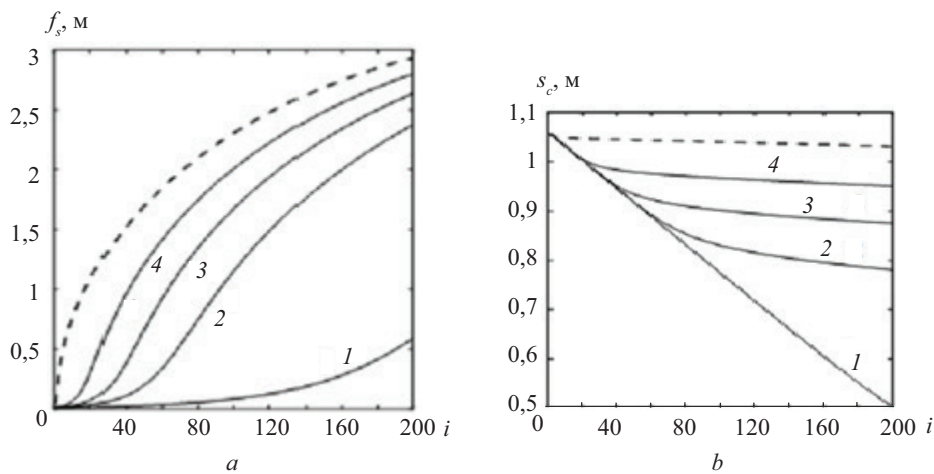


Рис. 15. Графики:  $a — f_s \sim i$ ;  $b — s_c \sim i$

Из представленных графиков видно, что наиболее интенсивно при трансформации происходит изменение углов  $\alpha_x$  (рис. 11) и  $\alpha_z$  (рис. 13).

Максимальное увеличение угла  $\alpha_x$  для стержня 2 (рис. 1) составляет:  $5,7^\circ$  (рис. 11,  $a$ );  $43^\circ$  (рис. 11,  $b$ );  $51,6^\circ$  (рис. 11,  $c$ ). При этом угол  $\alpha_z$  уменьшается:  $17,6^\circ$  (рис. 13,  $a$ );  $55,6^\circ$  (рис. 13,  $b$ );  $57,3^\circ$  (рис. 13,  $c$ ). Кривые на приведенных рисунках практически совпадают, что говорит о синхронности поворотов стержней 1 и 2. Подчеркнем, что изменения углов  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  характеризуют поворот стержня 2 относительно осей  $X$  и  $Z$  соответственно. Угол  $\alpha_y$  в процессе трансфор-

мации изменяется незначительно, максимум на  $0,4^\circ$  (рис. 12,  $c$ ).

В таблице представлены результаты модального анализа (первые три собственных пары) для вариантов арки без упругих шарниров и с упругими шарнирами, в которых  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000$  Н·м/рад. Как видно из таблицы, первые собственные частоты для рассматриваемых вариантов арки практически совпадают. Вместе с тем вторые и третьи собственные пары различаются количественно и качественно. Это объясняется наличием упругих шарниров, которые снижают жесткость конструкции и тем са-

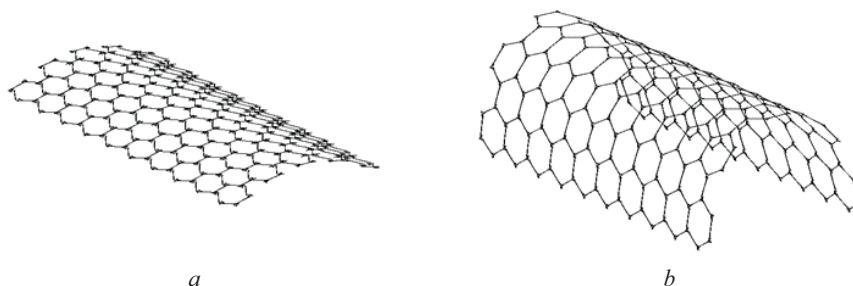


Рис. 16. Арочный вид решетки: *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1000$  Н·м/рад; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000$  Н·м/рад

мым уменьшают соответствующие собственные частоты.

В качестве альтернативного способа трансформации решетки рассмотрим расчетную схему, показанную на рис. 14. В данном случае шаг перемещения задается вдоль оси  $Y$ . Принимаем шаг  $\Delta_y = 0,01$  м и число шагов  $n_{step} = 200$ .

Результаты моделирования процесса трансформации решетки по альтернативной схеме в виде графиков зависимости «стрелы» подъема арки  $f_s$  и изменения размера ячейки  $s_c$  от шага перемещения  $i$  представлены на рис. 15.

Как видно из рис. 15, *b* графики  $s_c \sim i$  при значениях  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$ , равных 3000, 5000 и 10 000, нелинейны (линии 2, 3, 4). Вместе с тем при значениях жесткостей поворотных пружин 1000 Н·м/рад (линия 1) и для решетки без упругих шарниров (штриховая линия) характер зависимости  $s_c \sim i$  линейный.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Арочные формы решетки для параметров жесткости поворотных пружин 1000 и 10 000 Н·м/рад приведены на рис. 16.

Расчеты показали, что для данной расчетной схемы решетки (рис. 12) максимальный угол поворота стержней 1 и 2 при  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10\,000$  Н·м/рад не превышает  $\alpha_{zmax} = 6^\circ$ .

На основании выполненных вычислительных экспериментов установлено:

- предлагаемый прямой инкрементальный алгоритм решения геометрически нелинейной задачи является абсолютно сходящимся;
- разработанная методика назначения жесткостей поворотных пружин может быть использована при проектировании конкретной конструкции узлового соединения стержней регулярной решетки.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Семенов В.С., Акбаралиев Р. Трансформируемые конструкции покрытий в современной архитектуре // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2010. Т. 10. № 2. С. 25–31. EDN LMDBGV.
2. Лебедев Ю.С., Самохина Т.М. Трансформируемые конструкции в современной архитектуре. М.: ЦНТИ, 1983. 39 с.
3. Царитова Н.Г., Курбанов А.И., Курбанова А.А. Энергоэффективные здания на основе трансформируемых каркасов // Строительство и реконструкция. 2022. № 6 (104). С. 91–103. DOI: 10.33979/2073-7416-2022-104-6-91-103. EDN WRCQIB.
4. De Temmerman N., Mira L.A., Vergauwen A. Hendrickx H., De Wilde W.P. Transformable structures in architectural engineering // WIT Transactions on The Built Environment. 2012. DOI: 10.2495/hpsm120411
5. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. М.: Машиностроение, 1988. 388 с.
6. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997. 302 с.
7. Пхио А., Семенов В.Н., Федулов Б.Н. Оптимизация трансформируемых конструкций летательных аппаратов // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 1. С. 32–40. EDN NXSDGS.
8. Sol E.J. Kinematics and dynamics of multibody system: a systematic approach to systems with arbitrary connections : Phd Thesis. Technische Hogeschool Eindhoven, 1983. DOI: 10.6100/IR82221
9. Гайджуров П.П., Царитова Н.Г. Моделирование процесса направленной трансформации регулярных шарнирно-стержневых систем // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2021. № 1 (209). С. 5–11. DOI: 10.17213/0321-2653-2021-1-5-11. EDN HAMXJU.
10. Gaydzhurov P., Tsaritova N. Deformation modeling of rod structures under kinematic controlled action // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2024. Vol. 20. Issue 3. Pp. 14–23. DOI: 10.22337/2587-9618-2024-20-3-14-23
11. Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Онищенко Е.В. Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стерж-



невых систем // Вестник МГСУ. 2015. № 12. С. 47–58. EDN VBTZQR.

12. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: справочник/под общ. ред. В.И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.

13. Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.

14. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.

15. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.

16. Battini J.M., Pacoste C. Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems //

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2002. Vol. 191. Issue 17–18. Pp. 1755–1789. DOI: 10.1016/s0045-7825(01)00352-8

17. Kuo-Mo H., Horng-Jann H., Yeh-Ren C. A co-rotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures // Computers & Structures. 1987. Vol. 27. Issue 6. Pp. 769–781. DOI: 10.1016/0045-7949(87)90290-2

18. Басов К.А. ANSYS для конструкторов. М.: ДМК Пресс, 2012. 248 с.

19. Морозов Е.М., Муїземнек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: механика разрушения. М.: URSS, 2008. 453 с. EDN QJTBZ.

Поступила в редакцию 27 августа 2025 г.

Принята в доработанном виде 15 сентября 2025 г.

Одобрена для публикации 24 сентября 2025 г.

ОБ АВТОРАХ: **Петр Павлович Гайджуров** — доктор технических наук, профессор кафедры технической механики; **Донской государственный технический университет (ДГТУ)**; 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; gpp-161@yandex.ru;

**Надежда Геннадьевна Царитова** — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры градостроительства, проектирования зданий и сооружений; **Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова**; 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, д. 132; ncaritova@yandex.ru;

**Никита Аркадьевич Корчагин** — аспирант кафедры градостроительства, проектирования зданий и сооружений; **Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова**; 346428, г. Новочеркасск, ул. Просвещения, д. 132; ncaritova@yandex.ru.

Вклад авторов:

Гайджуров П.П. — научное руководство, концепция исследования, итоговые выводы.

Царитова Н.Г. — научное руководство, редактирование статьи, итоговые выводы.

Корчагин Н.А. — сбор и обработка данных, доработка текста.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## INTRODUCTION

One of the creative trends in modern architecture is kinetic design, which is based on controlled changes in the geometry of a structure to achieve the desired spatial and planning solutions [1, 2]. To this should be added the origami-inspired reshaping of structural elements of building facades. The idea of creating such structures is largely intertwined with technical solutions in the field of kinematically variable aerospace systems, such as deployable solar panels and wings with variable geometry [3–7]. In transformable mechanical systems, the symbiosis of robotics and biomechanics is also important for the design of android robots [8]. As a rule, the actuators of modern industrial robots perform large movements in three-dimensional space. Consequently, the system of differential equations of kinematics describing the working cycle of a robotic system will be nonlinear. In addition, the node connections of such mechanisms are made in the form of joints with feedback, which significantly complicates the process of computer modelling.

It should be noted that there is virtually no information in the literature on structural mechanics about

mathematical modelling of transformable hinged-rod systems taking into account shape change. In this regard, the development of engineering methods for calculating geometrically variable structures using the finite element method (FEM) [9, 10]. Finite element modelling of bar structures is based on the use of a beam finite element (FE) stiffness matrix with six degrees of freedom at the node [11–13]. Within the framework of linear analysis, the displacement and rotation angles of the beam FE are considered small. However, it is known that flexible bar systems are characterized by large linear and angular displacements at small deformations [14, 15]. In this case, the numerical solution of the geometrically nonlinear problem is based on the Newton – Raphson iterative procedure and the “corrective arcs” method, the essence of which is the adaptive correction of the load step size when approaching and after passing the bifurcation point [16, 17].

A simplified method for calculating flexible elastic rods is based on representing the rod as a set of straight beam elements of equal length connected by springs at the joints [3]. An example of a beam-spring model of a cantilever rod is shown in Fig. 1.

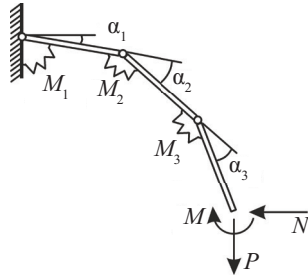


Fig. 1. Beam-spring diagram of a flexible rod (figure by the authors)

It is assumed that there is a linear relationship between the torque and the corresponding angle of rotation:

$$M_i = k\alpha_i; i = 1, 2, 3,$$

where  $k$  is the proportionality coefficient, which in this case characterizes the elastic stiffness of the hinge. In [3], the following functional was used to calculate flexible rods in a two-dimensional setting:

$$\Theta = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dx - \sum_i (M_i \alpha_i)_{x=x_i} + \Pi,$$

where  $M$  is the bending moment at the free end of the rod;  $EJ$  is the bending rigidity of the rod;  $M_i, \alpha_i$  are the reactive moments in the coupling springs and the rotation angles of the beam FE;  $\Pi$  is the work of external forces.

At the same time, it is assumed that the elastic stiffness of the springs is equivalent to the bending stiffness of the rod. The presented concept of deformation modelling is highly specialized and cannot be directly applied to structural mechanics problems related to the study of spatially kinematically transformable rod systems.

## MATERIALS AND METHODS

Finite element modelling of the transformation process of a regular hexagonal lattice with stepwise displacement of contour nodes in the direction of the global  $X$  and  $Y$  axes was performed using the ANSYS Mechanical software package [18–20]. The APDL programming language built into ANSYS was used to write macros. Each rod and node connection platform were represented as a single beam element.

Let us consider two models of node connections:

- a conventional model linking the displacements and rotation angles of the grid element nodes with the corresponding connection node nodes;
- a model with elastic hinges located between the grid element nodes and the connection node nodes.

The process of transforming the shape of each rod from its initial state to its final state is represented as a sequence of steps. At each step, we first remove the previous finite element mesh, and then build a new mesh based on the node coordinates adjusted to take into account the obtained displacements. In this case, the topological information about the finite element model of the grid is completely preserved. Fig. 2 shows a diagram of the adjustment of the coordinates of the FE nodes at the  $k$ -th step of the kinematic transformation.

## RESEARCH RESULTS

To demonstrate the proposed concept of deformation-induced shape change, we will perform finite element modelling of the transformation process of a regular bar system from its initial flat state to an arched shape under discrete kinematic action. The diagram of the hex-

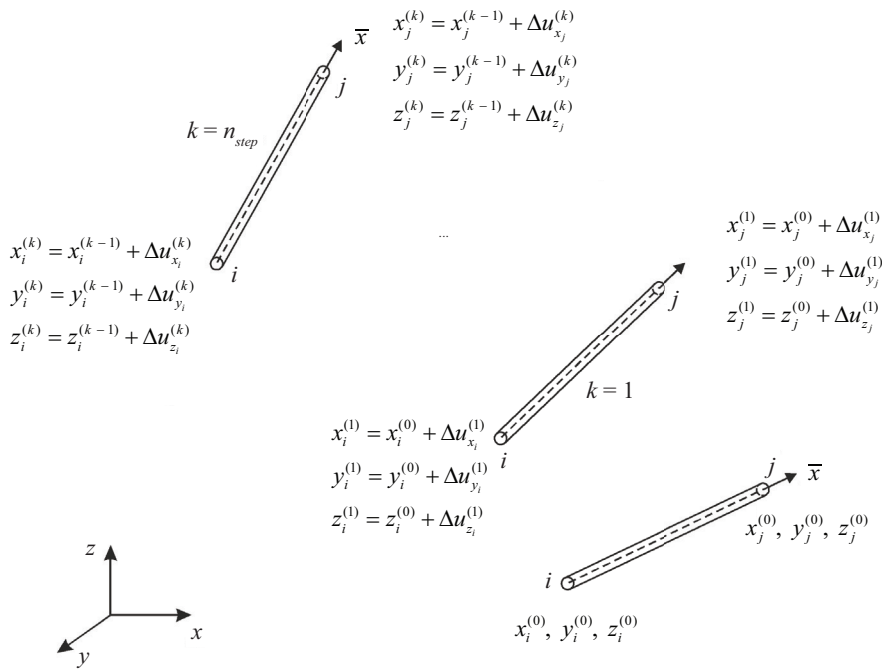


Fig. 2. Schematic representation of the transformation of the geometry of a beam FE ( $n_{step}$  — number of loading steps) (figure by the authors)

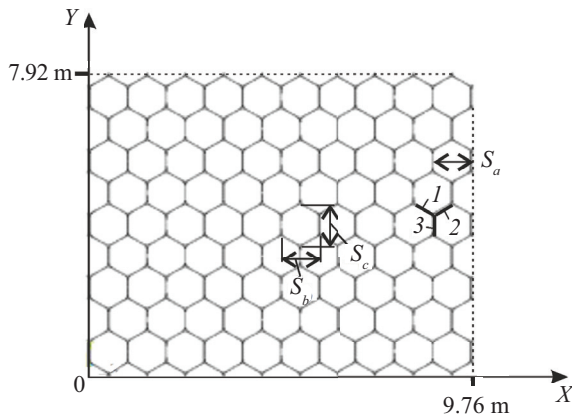


Fig. 3. Diagram of the hexagonal lattice in its initial position (figure by the authors)

agonal regular bar lattice under consideration in its initial (starting) position is shown in Fig. 3.

In Fig. 3, the reference values of the lattice cell dimensions in the initial state are  $s_{a,b} = 0.966$  m,  $s_c = 1.058$  m; numbers 1–3 denote the rods for which the orientation angles  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  are calculated during the lattice deformation process.

A model of a repeating node connection that allows modelling lattice deformation is shown in Fig. 4. This model includes a platform  $t$ , formed from three non-deformable bar elements. Elastic hinges are located at each vertex of the equilateral triangle  $t$  between paired nodes  $i$  and  $j$ .

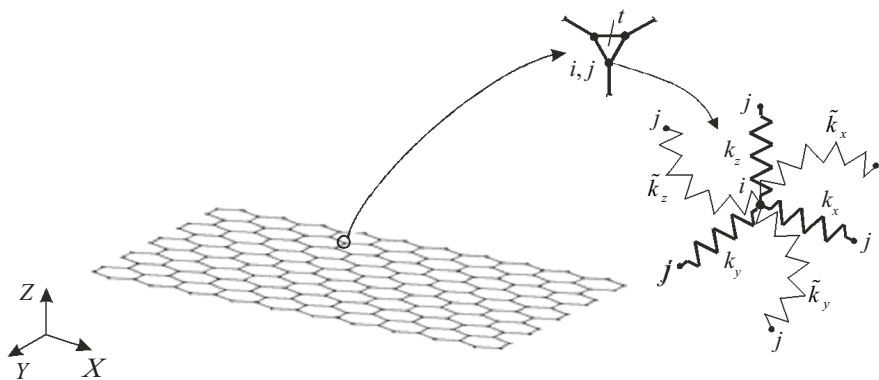


Fig. 4. Diagram of the node connection of the lattice rods (figure by the authors)

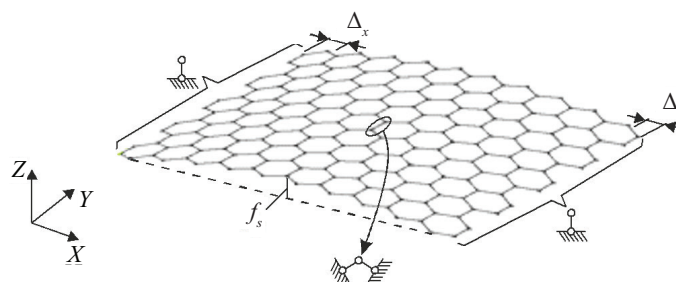


Fig. 5. Calculation diagram corresponding to symmetrical kinematic action  $\Delta_x$  (figure by the authors)

As shown in Fig. 4, each elastic hinge includes three linear and three torsional springs. The following symbols are used to denote the elements of the elastic hinge:  $k_x, k_y, k_z$  — stiffness coefficients of linear springs (N/m) oriented along the X, Y, Z;  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$  — corresponding stiffnesses of torsional springs (N·m/rad). Each rod of the lattice is modelled by a single beam FE.

Fig. 5 shows the calculated grid scheme corresponding to the synchronous symmetrical kinematic action on nodes with coordinates  $x = 0$  and  $x = 9.76$  m. We assign the following parameters for the transformation process: the initial value of the grid lift “arrow”  $f_s = 0.01$  m; increment value  $\Delta_x = 0.01$  m; number of steps  $n_{step} = 200$ . In all calculations, we take into account the dead weight of the structure. Note that the “initial” position of the grid under the given static boundary conditions coincides with the first natural mode.

Mechanical constants of lattice rods (aluminum alloy): modulus of elasticity  $E = 6.8 \cdot 10^4$  MPa; Poisson’s ratio  $\nu = 0.32$ ; density  $\rho = 2,885$  kg/m<sup>3</sup>. Modulus of elasticity of virtually non-deformable platform rods  $E_t = 10^9$  MPa. The lattice rods (length 0.4423 m) and node platforms (length 0.1 m) have a tubular cross-section with an outer diameter of 0.018 m. The pipe wall thickness is 0.0015 m. We assume that the stiffness coefficients  $k_x, k_y, k_z$  are numerically equal to the value of  $E$ .

The simulation results in the form of graphs showing the dependence of the lift arrow  $f_s$  on the number of transformation steps  $i$  for different values of the stiffness of the torsion springs are shown in Fig. 6. In Fig. 6, lines 1–4 correspond to the values  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$ : 1,000, 3,000, 5,000, 10,000 (N·m/rad). The graph with

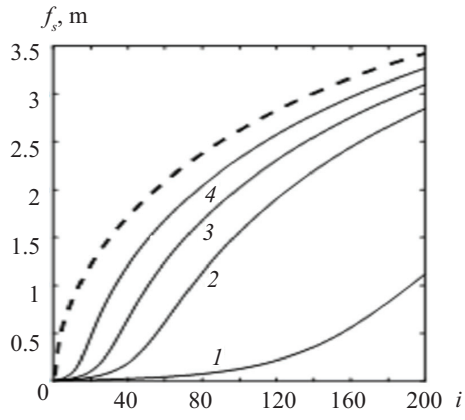


Fig. 6. Graphs of  $f_s \sim i$  (figure by the authors)

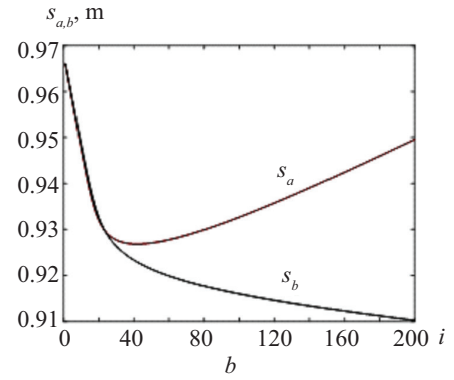
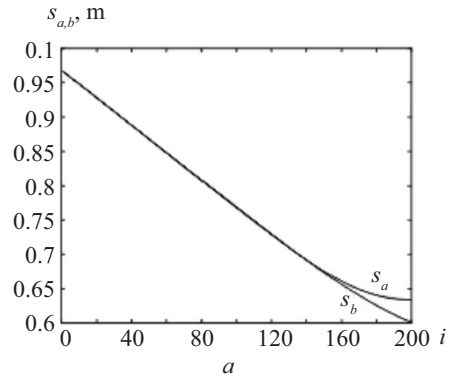


Fig. 8. Graphs  $s_{a,b} \sim i$ : a —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; b —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$

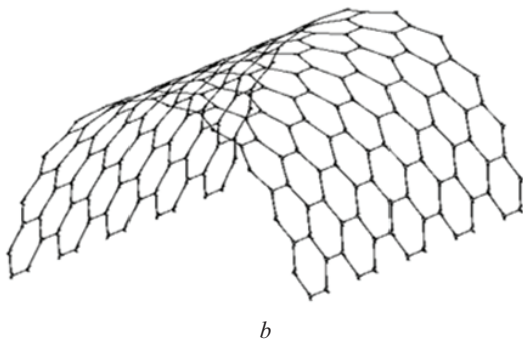
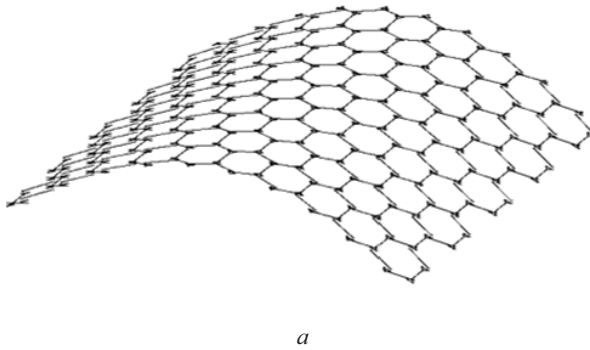


Fig. 7. Arch-shaped grid: a —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; b —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$  (figure by the authors)

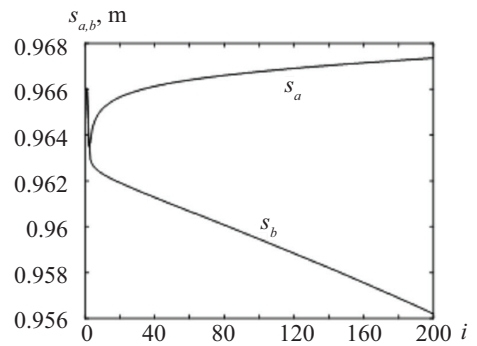


Fig. 9. Graphs of  $s_{a,b} \sim i$  for a lattice without elastic hinges

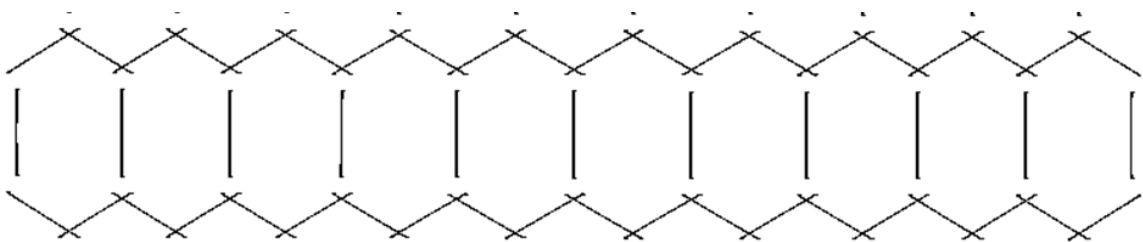


Fig. 10. Fragment of an arched lattice ( $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ )

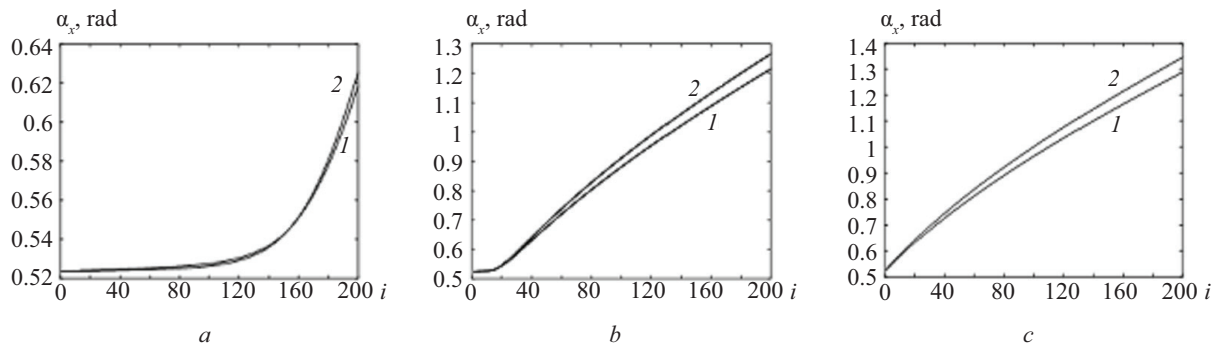


Fig. 11. Graphs  $\alpha_x \sim i$ : *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; *c* — without elastic joints

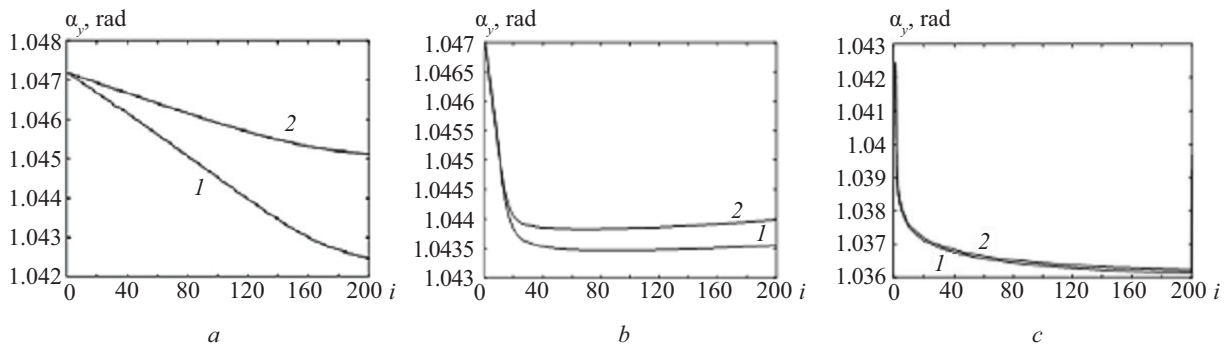


Fig. 12. Graphs  $\alpha_y \sim i$ : *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; *c* — without elastic joints

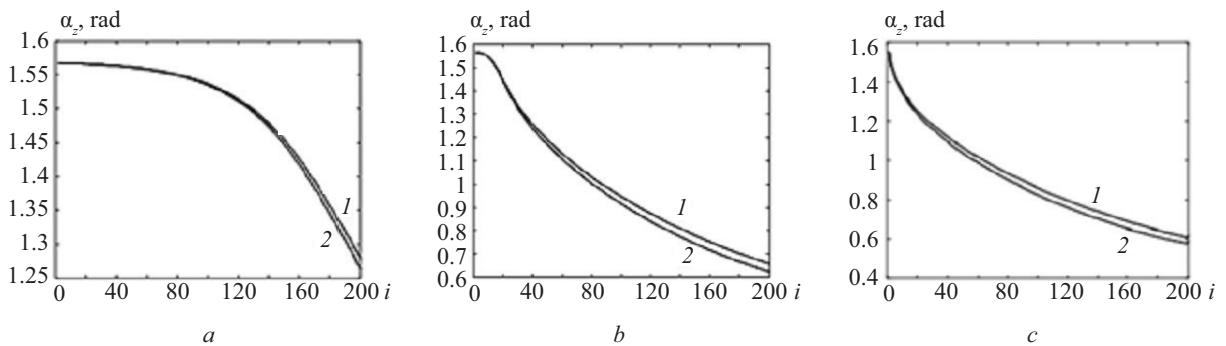


Fig. 13. Graphs  $\alpha_z \sim i$ : *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; *c* — without elastic joints

Results of modal analysis

Without elastic joints		
$\lambda_1 = 1.440 \text{ Hz}$ 	$\lambda_2 = 3.538 \text{ Hz}$ 	$\lambda_3 = 3.707 \text{ Hz}$ 
With resilient hinges		
$\lambda_1 = 1.404 \text{ Hz}$ 	$\lambda_2 = 2.010 \text{ Hz}$ 	$\lambda_3 = 2.103 \text{ Hz}$ 

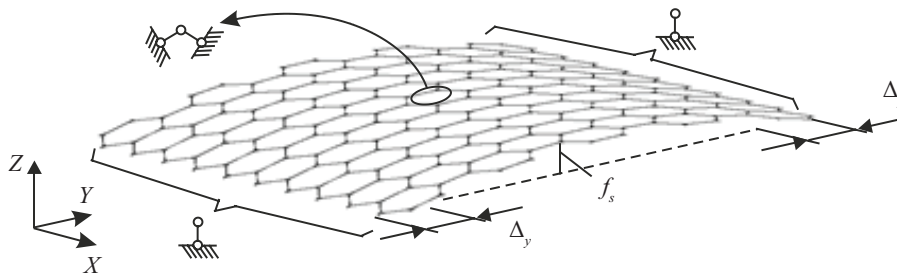


Fig. 14. Calculation diagram corresponding to symmetrical kinematic action  $\Delta_y$

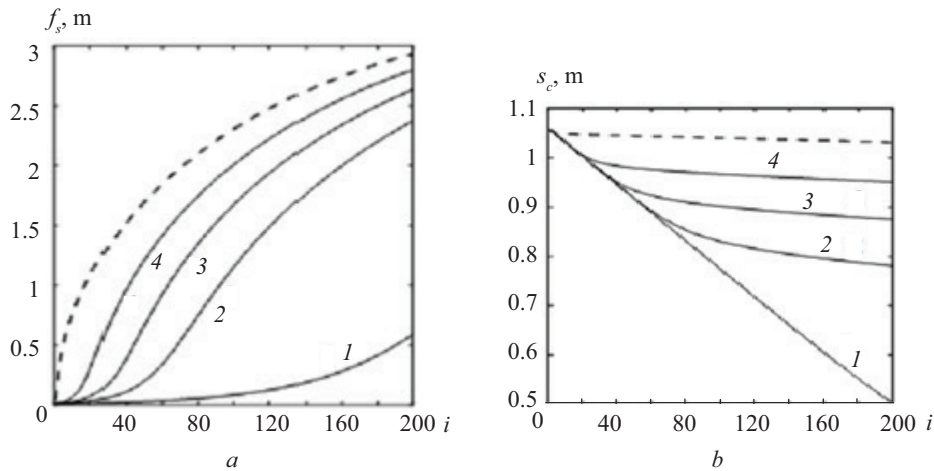


Fig. 15. Graphs:  $a — f_s \sim i$ ;  $b — s_c \sim i$

the dashed line corresponds to the grid variant without elastic hinges. The graphs show that the value of  $f_s$  depends non-linearly on the magnitude of the kinematic impact on the grid nodes with coordinates  $x = 0$  and  $x = 9.76$  m. The final arch shape of the grid at  $n_{step} = 200$  for  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$  1,000 N·m/rad and 10,000 N·m/rad is shown in Fig. 7.

Graphs showing changes in cell sizes depending on the transformation step are shown in Fig. 8.

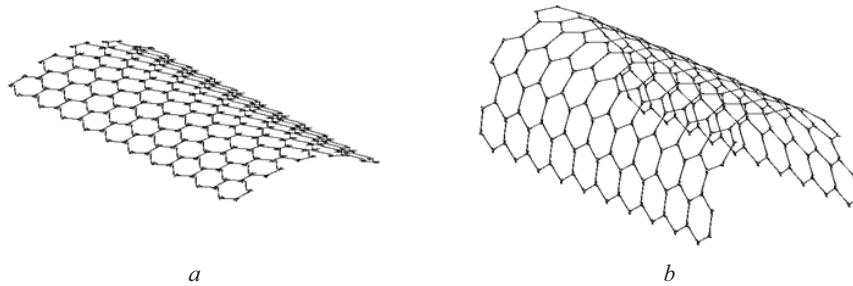
For comparison, Fig. 9 shows the graphical dependence of  $s_{a,b} \sim i$  for a lattice without elastic hinges. The graphs show that the maximum change in cell size  $s_b$  is 0.4 m in Fig. 6,  $a$ ; 0.056 m in Fig. 6,  $b$ ; and 0.01 m in Fig. 9. The size  $s_a$  changes by 0.016 and 0.0014 m, respectively. Moreover, in both cases, the nature of the graphs  $s_a \sim i$  qualitatively coincides, i.e., at the beginning of the transformation, there is a sharp decrease, followed by a gradual increase. As expected, the lattice with  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000$  N·m/rad is the most “gutta-percha-like” for a given type of kinematic action. Fig. 10 shows a visualization of a fragment of this lattice at  $n_{step} = 200$  (the position of the bar elements adjacent to the support nodes is shown).

It should be noted that in order to develop the design of a hexagonal lattice node connection, it is necessary to have data on the change in the orientation of the rods during the transformation process. For this purpose, a study was carried out on the dependence of the rotation angles  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  of rods 1 and 2 (Fig. 11)

on the transformation step  $i$ . The graphs  $\alpha_x \sim i, \alpha_y \sim i, \alpha_z \sim i$  for lattices with elastic hinges at parameter values  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$  1,000 N·m/rad, 10,000 N·m/rad, as well as lattices without elastic hinges are shown in Fig. 11–13. The graphs show that the most intense changes during transformation occur in the angles  $\alpha_x$  (Fig. 11) and  $\alpha_z$  (Fig. 13).

The maximum increase in angle  $\alpha_x$  for rod 2 (Fig. 1) is:  $5.7^\circ$  (Fig. 11,  $a$ );  $43^\circ$  (Fig. 11,  $b$ );  $51.6^\circ$  (Fig. 11,  $c$ ). At the same time, the angle  $\alpha_z$  decreases:  $17.6^\circ$  (Fig. 13,  $a$ );  $55.6^\circ$  (Fig. 13,  $b$ );  $57.3^\circ$  (Fig. 13,  $c$ ). The curves in the figures are practically identical, which indicates the synchronism of the rotations of rods 1 and 2. It should be emphasized that the changes in angles  $\alpha_x$  and  $\alpha_z$  characterize the rotation of rod 2 relative to the  $X$  and  $Z$  axes, respectively. The angle  $\alpha_y$  changes insignificantly during the transformation, by a maximum of  $0.4^\circ$  (Fig. 12,  $c$ ).

The Table shows the results of modal analysis (the first three eigenpairs) for arch variants without elastic hinges and with elastic hinges, in which  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000$  N·m/rad. As can be seen from the table, the first natural frequencies for the considered arch variants are practically the same. At the same time, the second and third natural pairs differ quantitatively and qualitatively. This is explained by the presence of elastic hinges, which reduce the stiffness of the structure and thus reduce the corresponding natural frequencies.



**Fig. 16.** Arch-shaped grid: *a* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 1,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$ ; *b* —  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$

As an alternative method of transforming the grid, consider the calculation scheme shown in Fig. 14. In this case, the displacement step is specified along the *Y*-axis. We assume a step  $\Delta_y = 0.01 \text{ m}$  and a number of steps  $n_{\text{step}} = 200$ .

The results of simulating the grid transformation process using the alternative diagram in the form of graphs showing the dependence of the arch rise  $f_s$  and the change in cell size  $s_c$  on the displacement step  $i$  are shown in Fig. 15.

As can be seen from Fig. 15, *b*, the graphs  $s_c \sim i$  at values  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$ , equal to 3,000, 5,000 and 10,000 are nonlinear (lines 2, 3, 4). At the same time, for values of torsional spring stiffness of 1,000 N·m/rad (line 1) and for a lattice without elastic hinges (dashed line), the dependence  $s_c \sim i$  is linear.

## CONCLUSION AND DISCUSSION

The arch shapes of the grid for the stiffness parameters of the torsion springs 1,000 and 10,000 N·m/rad are shown in Fig. 16.

Calculations have shown that for this lattice design (Fig. 12), the maximum rotation angle of rods 1 and 2 at  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = 10,000 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$  does not exceed  $\alpha_{\text{zmax}} = 6^\circ$ .

Based on the computational experiments performed, it has been established that:

- the proposed direct incremental algorithm for solving a geometrically nonlinear problem is absolutely convergent;
- the developed method for assigning the stiffness of torsion springs can be used in the design of a specific structure of a node connection of regular lattice rods.

## REFERENCES

1. Semenov V.S., Akbaraliev R. Transformable coating structures in modern architecture. *Herald of KRSU*. 2010; 10(2):25-31. EDN LMDBGV. (rus.).
2. Lebedev Yu.S., Samokhina T.M. *Transformable structures in modern architecture*. Moscow, TsNTI, 1983; 39. (rus.).
3. Tsaritova N.G., Kurbanov A.Ib., Kurbanova A.A.I. Energy-efficient buildings based on transformable frames. *Building and Reconstruction*. 2022; 6(104):91-103. DOI: 10.33979/2073-7416-2022-104-6-91-103. EDN WRCQIB. (rus.).
4. De Temmerman N., Mira L.A., Vergauwen A. Hendrickx H., De Wilde W.P. Transformable structures in architectural engineering. *WIT Transactions on The Built Environment*. 2012. DOI: 10.2495/hpsm120411
5. Usyukin V.I. *Construction mechanics of space technology structures*. Moscow, Mashinostroenie, 1988; 388. (rus.).
6. Banichuk N.V., Karpov I.I., Klimov D.M. et al. *Mechanics of large space structures*. Moscow, Factorial, 1997; 302. (rus.).
7. Phyo A., Semenov V.N., Fedulov B.N. Optimization of transformable aircraft structures. *Aerospace MAI Journal*. 2024; 31(1):32-40. EDN NXSDGS. (rus.).
8. Sol E.J. *Kinematics and dynamics of multibody system: a systematic approach to systems with arbitrary connections* : Phd Thesis. Technische Hogeschool Eindhoven, 1983. DOI: 10.6100/IR82221
9. Gaydzhurov P.P., Zaritova N.G. Modeling of the process of directed regular transformations hinge-rod systems. Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. *Technical Sciences*. 2021; 1(209):5-11. DOI: 10.17213/0321-2653-2021-1-5-11. EDN HAMXJU. (rus.).
10. Gaydzhurov P., Tsaritova N. Deformation modeling of rod structures under kinematic controlled action. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2024; 20(3):14-23. DOI: 10.22337/2587-9618-2024-20-3-14-23
11. Ignat'ev A. V., Ignat'ev V. A., Onishchenko E.V. Possibility of Using Finite Element Method in the Form of Classical Mixed Method for Geometrical Nonlinear Analysis of Hinged-Rod Systems. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015; 12:47-58. EDN VBTZQR. (rus.).
12. *Calculations of machine-building structures by the finite element method* : Handbook / Under the general editorship of V.I. Myachenkov. Moscow, Mashinostroenie, 1989; 520. (rus.).

13. Sekulovich M. *The finite element method*. Moscow, Stroyizdat, 1993; 664. (rus.).
14. Popov E.P. *Theory and calculation of flexible elastic rods*. Moscow, Nauka, 1986; 296. (rus.).
15. Svetlitsky V.A. *Mechanics of flexible rods and threads*. Moscow, Mashinostroenie, 1978; 222. (rus.).
16. Battini J.M., Pacoste C. Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2002; 191(17-18):1755-1789. DOI: 10.1016/s0045-7825(01)00352-8
17. Kuo-Mo H., Horng-Jann H., Yeh-Ren C. A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. *Computers & Structures*. 1987; 27(6):769-781. DOI: 10.1016/0045-7949(87)90-290-2
18. Basov K.A. *ANSYS for designers*. Moscow, DMK Press, 2012; 248. (rus.).
19. Morozov E.M., Muizemnek A.Yu., Shadsky A.S. *ANSYS in the hands of an engineer: mechanics of destruction*. Moscow, URSS, 2008; 453. EDN QJTBTZ. (rus.).

Received August 27, 2025.

Adopted in revised form on September 15, 2025.

Approved for publication on September 24, 2025.

**B I O N O T E S :** **Peter P. Gaydzhurov** — Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Technical Mechanics; **Don State Technical University (DSTU)**; 1 Gagarin square, 344003, Rostov-on-Don, Russian Federation; gpp-161@yandex.ru;

**Nadezhda G. Tsaritova** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Urban Planning, Design of Buildings and Structures; **Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)**; 132 Prosveshcheniya st., Novocherkassk, 346428, Russian Federation; ncaritova@yandex.ru;

**Nikita A. Korchagin** — postgraduate student of the Department of Urban Planning, Design of Buildings and Structures; **Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)**; 132 Prosveshcheniya st., Novocherkassk, 346428, Russian Federation; ncaritova@yandex.ru.

*Contribution of the authors:*

*Peter P. Gaydzhurov — scientific guidance, research concept, final conclusions.*

*Nadezhda G. Tsaritova — scientific guidance, editing of the article, final conclusions.*

*Nikita A. Korchagin — data collection and processing, text revision.*

*The authors declare that there is no conflict of interest.*