

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ / REVIEW PAPER

УДК 692.294

DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.7

## Математическое моделирование температурного поля ограждающих конструкций зданий

Кирилл Павлович Зубарев<sup>1,2,3</sup>, Михаил Валерьевич Емельянов<sup>1</sup>,  
Юлия Александровна Сапронова<sup>1</sup>, Виктор Львович Добшиц<sup>3</sup>,  
Никита Юрьевич Заварзин<sup>3</sup>, Вячеслав Владимирович Казунин<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия;

<sup>2</sup> Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ РААСН); г. Москва, Россия;

<sup>3</sup> Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (РУДН); г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Приведен обзор литературы по способам математического моделирования стационарных и нестационарных температурных полей ограждающих конструкций зданий. Показано, что температурное состояние ограждения влияет на энергосбережение и энергоэффективность здания. Разработка методов расчета температурного режима особенно актуальна в условиях появления новых конструктивных решений и теплоизоляционных материалов, например применения фазопереходных материалов, использования зданий с нулевым энергопотреблением и рассмотрения вопросов зеленого строительства.

**Материалы и методы.** Используются российские и зарубежные источники, в частности российские статьи из списка ВАК, диссертации кандидатов технических наук. Проанализированы зарубежные источники, проиндексированные в международных базах данных (Scopus и Web of Science).

**Результаты.** Отмечена работа А.В. Колесниковой, в которой рассматривается физико-математическая модель для описания нестационарного двумерного теплопереноса в неоднородном фрагменте. Приведена работа Л.А. Пульдас с исследованием многофакторной теплофизической модели, в которой учитывались многослойность конструкций, нестационарность процессов, наличие влаги и газовых сред. Представлен подход Т.А. Мирошниченко, который решает задачу о влиянии цилиндрического коннектора на тепловое состояние трехслойной ограждающей конструкции в цилиндрической системе координат. Изучены математическая модель и программное обеспечение Н.С. Котляровой, позволяющие определить трехмерное температурное поле и дополнительные тепловые потери.

**Выводы.** Оптимальным способом определения температурного поля ограждающей конструкции здания является использование нелинейного двумерного или трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности. При сложной геометрии объекта возможно разбить пространственно-временную область на ряд подобластей со своими граничными условиями. При совмещенной задаче можно добавить к уравнению теплопроводности ряд уравнений, например уравнения переноса водяного пара, воздуха, воды, льда.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** математическая модель, математическое моделирование, граничные условия, теплопроводность, температурное поле, температурно-влажностное поле, теплоперенос, энергосбережение, энергоэффективность, энергопотребление

*Благодарности.* Исследование выполнено за счет средств государственной программы Российской Федерации «Научно-технологическое развитие Российской Федерации» в рамках плана фундаментальных научных исследований Минстроя России и РААСН (фундаментальное научное исследование № 3.1.4.11 «Исследование нестационарного тепло-влажностного состояния ограждающих конструкций зданий с применением теории потенциала влажности» на 2024–2026 годы).

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Зубарев К.П., Емельянов М.В., Сапронова Ю.А., Добшиц В.Л., Заварзин Н.Ю., Казунин В.В. Математическое моделирование температурного поля ограждающих конструкций зданий // Строительство: наука и образование. 2026. Т. 16. Вып. 1. Ст. 7. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.7

Автор, ответственный за переписку: Кирилл Павлович Зубарев, [zubarevkirill93@mail.ru](mailto:zubarevkirill93@mail.ru).

## Mathematical modelling of the temperature distribution in building envelopes

Kirill P. Zubarev<sup>1,2,3</sup>, Mikhail V. Emelianov<sup>1</sup>, Yulia A. Sapronova<sup>1</sup>, Victor L. Dobshits<sup>3</sup>,  
Nikita Yu. Zavarzin<sup>3</sup>, Vyacheslav V. Kazunin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);  
Moscow, Russian Federation;

<sup>2</sup> *Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences (NIISF RAASN); Moscow, Russian Federation;*  
<sup>3</sup> *RUDN University; Moscow, Russian Federation*

## ABSTRACT

**Introduction.** This paper provides a literature review on methods for mathematically modelling steady-state and transient temperature fields in building envelopes. It is demonstrated that the thermal state of the envelope affects the energy conservation and energy efficiency of a building. It is noted that the development of temperature calculation methods is particularly relevant given the emergence of new design solutions and thermal insulation materials, such as the use of phase-change materials, the development of zero-energy buildings, and the consideration of green building.

**Materials and methods.** The literature review was written using both Russian and international sources. Russian papers from the Higher Attestation Commission (HAC) list and dissertations by candidates of technical sciences (PhD) were used. International sources indexed in international databases (Scopus and Web of Science) were also included.

**Results.** The paper describes the work of A.V. Kolesnikova, which considers a physical and mathematical model for describing non-stationary two-dimensional heat transfer in a heterogeneous fragment. The paper of L.A. Puldás is presented, examining a multifactor thermophysical model that takes into account the multi-layered nature of structures, the non-stationarity of processes, and the presence of moisture and gaseous media. The approach of T.A. Miroshnichenko, which solves the problem of the influence of a cylindrical connector on the thermal state of a three-layer enclosing structure in a cylindrical coordinate system, is considered. The mathematical model and software of N.S. Kotlyarova, allowing one to determine the three-dimensional temperature field and additional heat losses, are studied.

**Conclusions.** The optimal way to determine the temperature field of a building's enclosing structure is to use a nonlinear two-dimensional or three-dimensional transient heat equation. For complex object geometry, it is possible to divide the spatiotemporal domain into a number of subdomains with their own boundary conditions. For a combined problem, it is possible to supplement the heat equation with other equations, such as the equations for the transport of water vapor, air, water, and ice.

**KEYWORDS:** mathematical model, mathematical modelling, boundary conditions, thermal conductivity, temperature field, temperature-moisture field, heat transfer, energy saving, energy efficiency, energy consumption

**Acknowledgements.** The study was carried out using funds from the state program of the Russian Federation "Scientific and Technological Development of the Russian Federation" within the framework of the fundamental scientific research plan of the Ministry of Construction of Russia and the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (fundamental scientific research No. 3.1.4.11 "Study of the non-stationary heat-humidity state of building envelopes using the theory of humidity potential" for 2024–2026).

**FOR CITATION:** Zubarev K.P., Emelianov M.V., Sapronova Yu.A., Dobshits V.L., Zavarzin N.Yu., Kazunin V.V. Mathematical modelling of the temperature distribution in building envelopes. *Construction: Science and Education*. 2026; 16(1):7. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.7

*Corresponding author:* Kirill P. Zubarev, [zubarevkill93@mail.ru](mailto:zubarevkill93@mail.ru).

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение температурного поля узлов различных ограждающих конструкций зданий является актуальной задачей в строительстве. Именно температурное состояние ограждения влияет на приведенное сопротивление теплопередаче, тепловые потери и, как следствие, на энергосбережение и энергоэффективность здания [1–5]. Грамотно рассчитанный температурный режим ограждающей конструкции приводит к созданию благоприятных температурных условий в помещении [6–9], что способствует повышению качества жизни человека [10].

Исследование теплопереноса в различных ограждающих конструкциях должно учитывать их особенности. Теплоперенос принципиально по-разному рассчитывается для стен [11, 12], кровель [13] и светопрозрачных ограждений [14, 15]. Температурный режим непрозрачных конструкций возможно рассматривать либо на основании уравнения теплопроводности [16–18], либо он может быть осложнен переносом влаги [19–24]. Расчеты светопрозрачных ограждающих конструкций ведутся с учетом светового комфорта в помещении, а также необходимости учитывать воздушную прослойку между окнами [14]. Разработка различных методов расчета температурного режима

актуальна в условиях появления новых конструктивных [25–27] и теплоизоляционных материалов [28–30]. Например, в жарких странах используются здания с фазопереходными материалами [31]. Также строятся сооружения нового типа. Особенно важны разработки зданий с нулевым энергопотреблением [32, 33] и вопросы зеленого строительства [34].

Математическое моделирование температурного режима выполняется как с разработкой компьютерных программ [35, 36], так и с применением программных комплексов [37–40]. Наиболее сложные расчетные случаи появляются, когда требуется моделировать различные узлы здания, например, оконные откосы, сопряжения колонн и кровель и т.д. Климатические условия разных районов строительства отличаются и создают уникальные краевые условия для температурных полей [41, 42]. Ученые всего мира отдельно изучают температурные режимы ограждающих конструкций зданий, построенных в разных странах. Примером служат исследования теплопереноса в зданиях Китая [43], Новой Зеландии [44], Италии [45], Великобритании [46].

Задача исследования — проведение обзора литературы по способам математического моделирования температурных полей ограждающих конструкций зданий.

**МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ**

Обзор литературы включал изучение и описание российских и зарубежных источников. Использовались российские статьи из списка ВАК, диссертации кандидатов технических наук, согласно базе данных<sup>1</sup>. Описывались зарубежные источники, проиндексированные в международных базах данных (Scopus и Web of Science). На работы всех авторов приведены библиографические ссылки.

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ**

**Математическая модель нестационарного температурного поля в двухмерной постановке**

А.В. Колесникова предложила для описания нестационарного двумерного теплопереноса в неоднородном керамзитобетонном фрагменте применять физико-математическую модель, показанную на рис. 1 [47].

Теплоперенос в областях 1 и 2 (рис. 1) описывается следующими уравнениями [47]:

$$(\rho c)_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial y}), \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$t_1|_{\tau=0} = t_{\text{вн}}(x, y), \quad 0 \leq x \leq X_1, \quad 0 \leq y \leq Y_1 \quad (2)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_1} = \alpha_{\text{вн}}(t_{\text{вн}} - t_1) \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_2} = \alpha_{\text{вн}}(t_1 - t_{\text{вн}}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_1} = 0 \quad (6)$$

$$t_1|_{x=X_1} = t_2|_{x=X_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_1}, \quad (7)$$

$$Y_1 \leq y \leq Y_2;$$

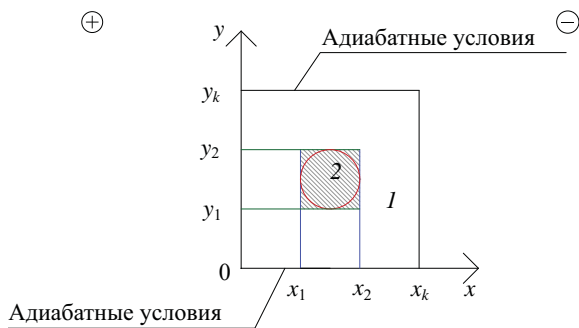


Рис. 1. Поперечное сечение фрагмента стены по данным А.В. Колесниковой: 1 — конструкционный материал; 2 — утеплитель [47]

<sup>1</sup> Dissercat. URL: <https://www.dissercat.com/>

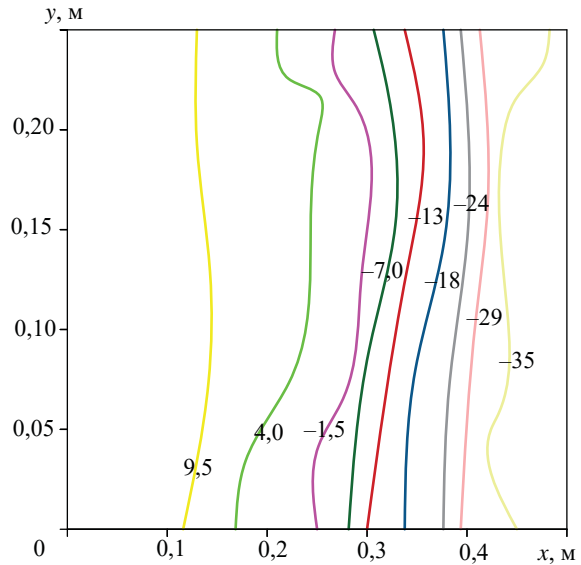


Рис. 2. Изотермы в поперечном сечении неоднородного керамзитобетонного фрагмента стены при  $\tau = 168$  ч по данным А.В. Колесниковой [47]

$$t_1|_{x=X_2} = t_2|_{x=X_2}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_2} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_2}, \quad (8)$$

$$Y_1 \leq y \leq Y_2$$

$$t_1|_{y=Y_1} = t_2|_{y=Y_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} \Big|_{y=Y_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} \Big|_{y=Y_1}, \quad (9)$$

$$X_1 \leq x \leq X_2$$

$$t_1|_{y=Y_2} = t_2|_{y=Y_2}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} \Big|_{y=Y_2} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} \Big|_{y=Y_2}, \quad (10)$$

$$X_1 \leq x \leq X_2,$$

где  $\rho$  — плотность слоя, кг/м<sup>3</sup>;  $t_{\text{вн}}$  — температура внешней среды, °С;  $t_{\text{ге}}$  — температура наружного воздуха, °С.

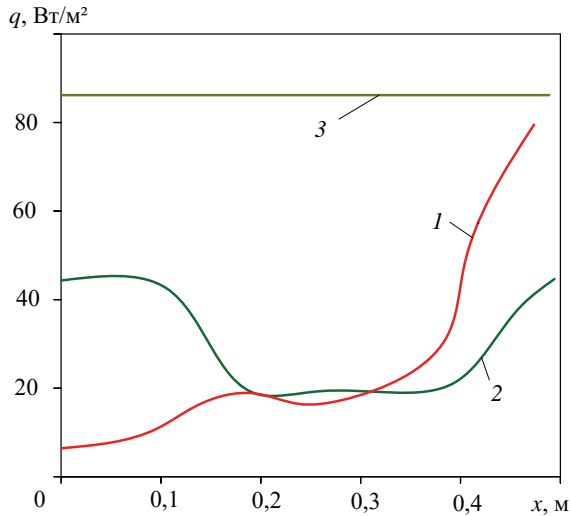
Далее автор приводит график, показанный на рис. 2, на котором показано распределение температуры в неоднородном фрагменте. Максимальное возмущение температурного поля наблюдается в зонах стыка утеплителя и керамзитобетона [47].

Приводится график зависимости теплового потока (рис. 3) для неоднородной и однородной стены в разные моменты времени [47].

Согласно исследованию, время выхода на стационар исследуемой конструкции составило 60 ч [47].

**Теплофизическая модель нестационарного температурного поля в гражданских зданиях**

В работе Л.А. Пульдас была разработана теплофизическая модель, в которой учитывались следующие особенности: многослойность конструкций стенок ограждений; нестационарность теплофизических процессов; решение задачи в двухмерной и трехмерной постановках, наличие влаги и газовых фаз, а также фазовых переходов в многофазной



**Рис. 3.** Распределение плотностей тепловых потоков по  $x$  в сечении  $Y_k/2$  для неоднородной (1, 2) и однородной (3) керамзитобетонной стены в различные моменты времени  $t$ , ч: 1 — 12; 2, 3 — 168 по данным А.В. Колесниковой [47]

среде. Трехмерная постановка использовалась для анализа процессов в угловых частях зданий [48]. Также в предложенной модели учитывался баланс массы каждой отдельной фазы: газа (смеси идеальных газов), воды, льда. Уравнения можно записать в виде [48]:

- для водяного пара:

$$\frac{\rho_{nij}^{(n+1)} + \rho_{nij}^{(n)}}{\Delta t} \cdot V_{ij} = - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \rho_{nij} \cdot v_{nij}^{nk} \cdot \Delta S_{ijk} + I_{in} \cdot V_{ij}; \quad (11)$$

- для воздуха:

$$\frac{\rho_{aij}^{(n+1)} + \rho_{aij}^{(n)}}{\Delta t} \cdot V_{ij} = - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \rho_{aij} \cdot v_{aij}^{nk} \cdot \Delta S_{ijk}; \quad (12)$$

- для воды:

$$\frac{\rho_{lij}^{(n+1)} + \rho_{lij}^{(n)}}{\Delta t} \cdot V_{ij} = - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \rho_{lij} \cdot v_{lij}^{nk} \cdot \Delta S_{ijk} + I_{nl} \cdot V_{ij} + I_{sl} \cdot V_{ij}; \quad (13)$$

- для льда:

$$\frac{\rho_{sij}^{(n+1)} + \rho_{sij}^{(n)}}{\Delta t} \cdot V_{ij} = I_{ls} \cdot V_{ij}. \quad (14)$$

Автор выводит уравнение баланса внутренней энергии многофазной среды [48]:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\rho_i \cdot U_i^{(n+1)}) - \sum_{i=1}^N (\rho_i \cdot U_i^{(n)})}{\Delta t} \cdot V_{ij} = - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \sum_{i=1}^N (\rho_i \cdot v_i^{nk} \cdot U_i)_k \cdot \Delta S_k - \sum_{k=1}^{k=4(6)} q_k^{nk} \cdot \Delta S_k. \quad (15)$$

Начальное распределение температур параметров на момент времени  $t = 0$  [48]:

$$T = T_0(t_0, x, y); \quad (16)$$

$$\rho_n^{(v_g)} = \rho_{n0}^{(v_g)}(t_0, x, y); \quad (17)$$

$$\rho_b^{(v_g)} = \rho_{b0}^{(v_g)}(t_0, x, y); \quad (18)$$

$$\rho_l = \rho_l(t_0, x, y); \quad (19)$$

$$\rho_s = \rho_s(t_0, x, y). \quad (20)$$

### Математическая модель нестационарного тепло- и влагопереноса в многослойных ограждающих конструкциях с включениями

Г.А. Мирошниченко изучает влияние цилиндрических теплотехнических неоднородностей на температурное поле трехслойной ограждающей конструкции, состоящей из кирпичной кладки с двух сторон и утеплителя в центре стены [49].

Задача решается с применением цилиндрической системы координат. Схема приведена на рис. 4 [49].

Расчетная геометрическая область разбивается на четыре подобласти [49]. Теплоперенос в каждой из подобластей описывается нелинейным нестационарным двухмерным уравнением теплопроводности [49]:

$$(\rho c)_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial x}), \quad (21)$$

$i = \overline{1, 4}, x, r, \tau \in D;$

$$t_{\square} \Big|_{\tau=0} = t_{\square}(x), \quad x \in \square, \square = \overline{1, 4}; \quad (22)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (t_{g,ins} - t_0), \quad 0 \leq r \leq R_k; \quad (23)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{x=X_k} = \alpha_w (t_{g,e} - t_w), \quad 0 \leq r \leq R_k; \quad (24)$$

$$\frac{\partial t_i}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad i = 1, 3, 4, \quad 0 \leq x \leq X_k; \quad (25)$$

$$\frac{\partial t_i}{\partial r} \Big|_{r=R_k} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq x \leq X_k; \quad (26)$$

$$t_1 \Big|_{x=X_1} = t_1 \Big|_{x=X_1}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_1} = \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial x} \Big|_{x=X_1}, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (27)$$

$$t_4 \Big|_{x=X_4} = t_3 \Big|_{x=X_4}, \quad \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial x} \Big|_{x=X_4} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{x=X_4}, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (28)$$

$$t_1 \Big|_{x=X_2} = t_2 \Big|_{x=X_2}, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_2} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_2}, \quad R \leq r \leq R_k; \quad (29)$$

$$t_2 \Big|_{x=X_3} = t_3 \Big|_{x=X_3}, \quad \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_3} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{x=X_3}, \quad R \leq r \leq R_k; \quad (30)$$

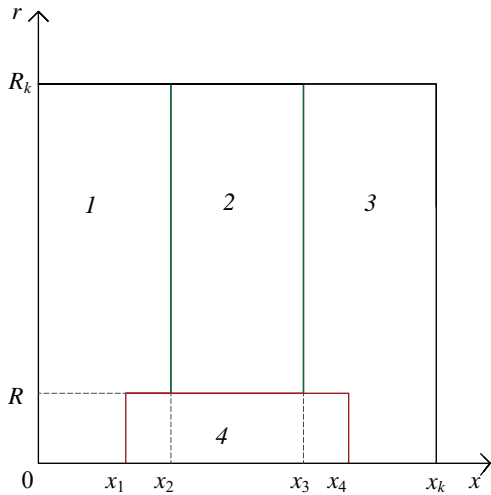


Рис. 4. Схема трехслойного наружного ограждения с коннектором: 1–3 — внутренний, средний и наружный слой ограждения; 4 — коннектор по данным Т.А. Мирошниченко [49]

$$t_4 \Big|_{r=R} = t_1 \Big|_{r=R}, \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial r} \Big|_{r=R} = \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (31)$$

$$X_1 \leq x \leq X_2;$$

$$t_4 \Big|_{r=R} = t_2 \Big|_{r=R}, \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial r} \Big|_{r=R} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (32)$$

$$X_2 \leq x \leq X_3;$$

$$t_4 \Big|_{r=R} = t_3 \Big|_{r=R}, \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial r} \Big|_{r=R} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (33)$$

$$X_3 \leq x \leq X_4, \tau \in [0, \tau_{fin}].$$

Численно задача решена методом расщепления Н.Н. Яненко. На каждом временном шаге было рассмотрено два этапа. Сначала решалась одномерная задача в направлении  $r$ , а перенос тепла в направлении  $x$  не учитывался. Затем производилось решение одномерной задачи в направлении  $x$ , а перенос тепла в направлении  $r$  не учитывался. Далее автор,

аналитически решая задачу, применяет итерационно-интерполяционный метод (ИИМ). Решение нестационарного теплопереноса проверено на сгущающихся сетках по пространству и времени. Поле изотерм в трехслойной конструкции с коннектором и без него представлено на рис. 5 [49].

Автором проведен эксперимент по определению температурных полей и теплозащитных свойств материалов. Испытания осуществлялись в лаборатории в климатической камере, состоящей из холодной зоны объемом  $30 \text{ м}^3$  и теплой зоны объемом  $28 \text{ м}^3$ , был выполнен фрагмент трехслойной ограждающей конструкции размерами  $2450 \times 2800 \times 660 \text{ мм}$ . На расстоянии  $380 \text{ мм}$  друг от друга заделаны датчики температуры из стеклопластика [49].

Результаты испытаний представлены на рис. 6, 7 [49].

### Математическая постановка задачи для температурного поля в ограждающих конструкциях в зоне установки отопительного прибора

Математическую модель и компьютерную программу для определения трехмерных температурных полей и дополнительных тепловых потерь в зоне установки стального панельного радиатора разработала Н.С. Котлярова [50].

С целью решения задачи местного нагрева автор применяет метод источников, в основе лежит принцип суперпозиции температурных полей [50]:

$$\frac{\partial \square}{\partial \tau} = \square \nabla^2 \square \quad (34)$$

Для того чтобы получить аналитическое решение по методу источников, используется готовое решение, по которому находится температура в любой точке и момент времени неограниченного по осям  $x, y, z$  тела [50]:

$$t(R, \tau) = \frac{Q}{c\rho(4\pi a\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right). \quad (35)$$

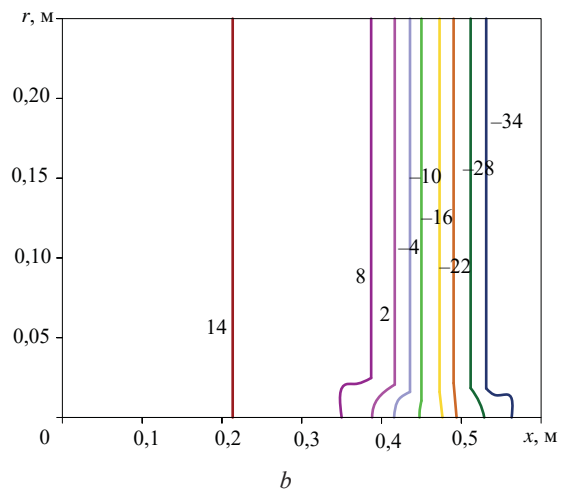
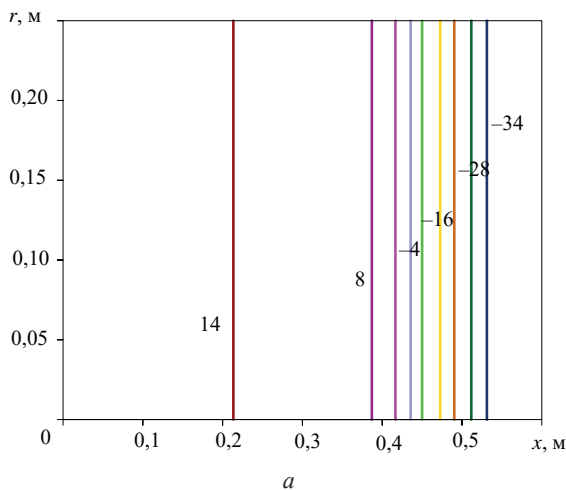


Рис. 5. Поле изотерм в трехслойной ограждающей конструкции: a — без коннектора при  $\tau_{min} = 24 \text{ ч}$ ; b — с коннектором при  $\tau_{min} = 24 \text{ ч}$  по данным Т.А. Мирошниченко [49]

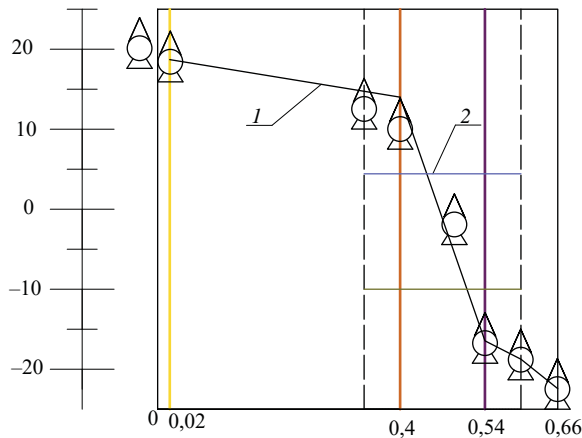


Рис. 6. Характер распределения температур в стене с коннектором 2 по данным Т.А. Мирошниченко (1 — аппроксимирующая зависимость) [49]

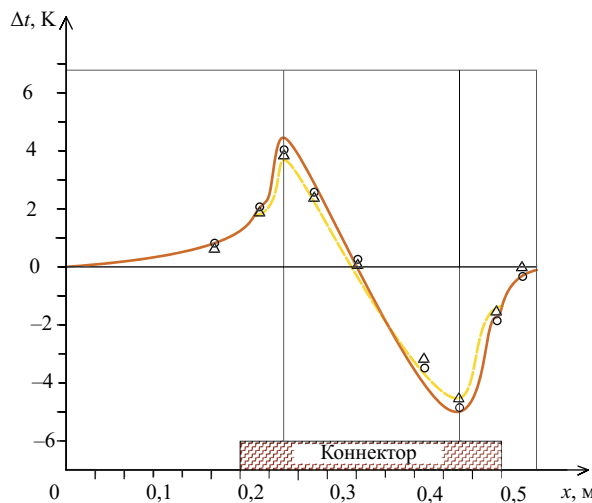


Рис. 7. Характер распределения перепадов температур по данным Т.А. Мирошниченко [49]

Автор получает аналитические решения по определению температурного поля ограждающей конструкции здания, которая нагревается отопительным прибором [50].

Далее Н.С. Котлярова рассматривает однослойную ограждающую конструкцию в виде неограниченной пластины по осям  $x$  и  $y$  толщины  $\delta$ , показанную на рис. 8 [50].

К поверхности  $z$  прикладывается неравномерно распределенный источник тепла, изменяющийся по определенному закону. Дифференциальное уравнение и граничные условия [50]:

$$\frac{\partial \square}{\partial \tau} = \square \left( \frac{\partial \square}{\partial x^2} + \frac{\partial \square}{\partial y^2} + \frac{\partial \square}{\partial z^2} \right) \quad (36)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = q(0,0) \exp(-k_1 x^2 - k_2 y^2) + \alpha_0 (t_{\text{в.в}} - t_{\text{в.п}}); \quad (37)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=\delta} = \alpha_\delta (t_{\text{н.п}} - t_{\text{н.в}}); \quad (38)$$

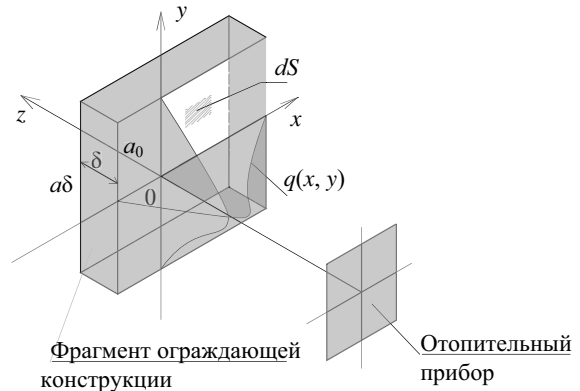


Рис. 8. Схема нагрева внутренней поверхности ограждения поверхностным нормально распределенным источником теплоты (отопительным прибором) по данным Н.С. Котляровой [50]

$$\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=-\infty} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=-\infty} = \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=+\infty} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=+\infty} = 0; \quad (39)$$

$$t(x, y, z, 0) = t_0. \quad (40)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

А.В. Колесниковой была предложена физико-математическая модель для описания нестационарного двухмерного теплопереноса в неоднородном фрагменте. Данная модель описывается нелинейным двухмерным нестационарным уравнением теплопроводности, которое автор предлагает решить при помощи метода расщепления Н.Н. Яненко. В качестве результата автор приводит графики распределения температуры в неоднородном фрагменте, согласно исследованию, время выхода на стационар составило 60 ч.

Л.А. Пульдас рассмотрела многофакторную задачу и разработала теплофизическую модель, в которой учитывалась многослойность конструкций, нестационарность процессов, наличие влаги и газовых сред. Также были записаны уравнения баланса массы для каждой отдельной фазы: газа, воды, льда. В результате получено уравнение баланса внутренней энергии многофазной среды.

Математическая модель и программное обеспечение, определяющее трехмерное температурное поле и дополнительные тепловые потери, разработаны Н.С. Котляровой. Для решения задачи автор применяет метод источников, в основе которого лежит принцип суперпозиции температурных полей. Рассматривается однослойная ограждающая конструкция в виде неограниченной пластины по осям  $x$  и  $y$  толщины  $\delta$  и записываются дифференциальное уравнение и граничные условия для внутренней поверхности ограждения поверхностным нормально распределенным источником теплоты.

Т.А. Мирошниченко решает задачу о влиянии цилиндрического коннектора на тепловое состоя-

ние трехслойной ограждающей конструкции в цилиндрической системе координат. Теплоперенос в каждой из областей можно описать нелинейным нестационарным двухмерным уравнением теплопроводности. Численно задача решилась при помощи расщепления Н.Н. Яненко. На каждом шаге было два этапа: решалась одномерная задача в направлении  $r$ , перенос тепла в направлении  $x$  не учитывался, затем задача решалась в направлении  $x$ , а теплоперенос не учитывался в направлении  $r$ .

В результате анализа литературы установлено, что оптимальный способ определения температурно-

го поля ограждающей конструкции здания — использование нелинейного двухмерного или трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности. При сложной геометрии объекта возможно разбить пространственно-временную область на ряд подобластей со своими граничными условиями, а общую теплотехническую задачу разбить на серию подзадач. При совмещенной задаче можно добавить к уравнению теплопроводности ряд уравнений, например уравнения переноса водяного пара, воздуха, воды, льда. В ряде случаев эффективно заменить классическую декартовую систему координат на цилиндрическую.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Vatin N., Gamayunova O.* Energy efficiency and energy audit: the experience of the Russian Federation and the Republic of Belarus // *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 1065–1069. Pp. 2159–2162. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1065-1069.2159. EDN BMRHDG.
2. *Zaborova D., Musorina T.* Environmental and energy-efficiency considerations for selecting building envelopes // *Sustainability*. 2022. Vol. 14. Issue 10. P. 5914. DOI: 10.3390/su14105914. EDN IXJBWJ.
3. *Alhawari A., Mukhopadhyaya P.* Mitigating balcony thermal bridging: Experimental and numerical investigation of innovative solutions for energy-efficient building envelopes // *Energy and Buildings*. 2025. Vol. 328. P. 115152. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.115152. EDN PGXTIW.
4. *Kalwry H., Atakara C.* Exploring energy-efficient design strategies in high-rise building facades for sustainable development and energy consumption // *Buildings*. 2025. Vol. 15. Issue 7. P. 1062. DOI: 10.3390/buildings15071062. EDN NEQQOM.
5. *Zhangabay N., Oner A., Rakhimov M., Tursunkululy T., Abdikerova U.* Thermal performance evaluation of a retrofitted building with adaptive composite energy-saving facade systems // *Energies*. 2025. Vol. 18. Issue 6. P. 1402. DOI: 10.3390/en18061402. EDN DEAVUO.
6. *Yu J., Lu Y., Hu J., Zhong K., Jia T., Yang X.* Prediction models for building thermal mass of intermittently heated rooms for balancing energy consumption and indoor thermal comfort // *Energy and Buildings*. 2024. Vol. 317. P. 114376. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114376. EDN YMISDG.
7. *Shchukina T.V., Kurasov I.S., Nikolskaya N.G.* Constructive solutions of energy-active external fences with an estimated justification of heat gain from solar radiation into the premises // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2025. Pp. 147–156. DOI: 10.1007/978-3-031-80482-3\_15
8. *Schukina T.V., Kurasov I.S., Drapaliuk D.A., Popov P.* Improving the energy efficiency of buildings based on the use of integrated solar wall panels // *E3S Web of Conferences*. 2021. Vol. 244. P. 05009. DOI: 10.1051/e3sconf/202124405009. EDN OELQSM.
9. *Zhangabay N., Zhangabay A., Utelbayeva A., Tursunkululy T., Sultanov M., Kolesnikov A.* Energy-Efficient Outdoor Fencing with Air Layers: A Review of the Effect of Solar Radiation on the Exterior Fencing of Buildings Made of Composite Material // *Journal of Composites Science*. 2025. Vol. 9. Issue 1. P. 9. DOI: 10.3390/jcs9010009. EDN BYXUWN.
10. *Kotlyarova E.* Improving the methodology for assessing the level of environmental safety of urban areas as the basis of their life cycle // *E3S Web of Conferences*. 2023. P. 09062. DOI: 10.1051/e3sconf/202338909062. EDN UZBTZM.
11. *Мусорина Т.А., Петриченко М.Р., Заборова Д.Д., Гамаюнова О.С.* Определение активного и реактивного сопротивления для однослойного стенового ограждения // *Вестник МГСУ*. 2020. Т. 15. № 8. С. 1126–1134. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.8.1126-1134. EDN CLTIYY.
12. *Kokaya D., Zaborova D., Koriakovtseva T.* Environmental analysis of residential exterior wall construction in temperate climate // *Magazine of Civil Engineering*. 2023. No. 8 (124). DOI: 10.34910/MCE.124.10. EDN HNNOQM.
13. *Saba M., Coronado-Hernández O.E., Gil L.K.T.* Energy efficiency in subtropical homes: replacing asbestos-cement roofs with sustainable alternatives // *Buildings*. 2024. Vol. 14. Issue 12. P. 4082. DOI: 10.3390/buildings14124082. EDN WAGYVW.
14. *Коркина Е.В.* Основное соотношение для оценки энергосбережения при применении остекления с низкоэмиссионными покрытиями // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2025. № 4 (796). С. 132–137. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-796-4-132-137. EDN TAXFPZ.
15. *Shah B., Bhandari M., Tang M.* Importance of window installation in residential building envelopes having continuous external insulation in order to realize

energy efficiency // *Energies*. 2024. Vol. 17. Issue 17. P. 4273. DOI: 10.3390/en17174273. EDN IFBQNO.

16. *Dornyak O.R., Nedonoskov A.B.* Heat Transfer in a Three-Layer Strain Joint System at Microwave Heating // *Optics and Spectroscopy*. 2024. Vol. 132. Issue 1. Pp. 1–8. DOI: 10.1134/S0030400X24700279. EDN KWNUUQ.

17. *Moctezuma-Sánchez M., Espinoza Gomez D., López-Sosa L.B., Golpour I., Morales-Máximo M., González-Carabes R.* A Thermal model for rural housing in Mexico: towards the construction of an internal temperature assessment system using aerial thermography // *Buildings*. 2024. Vol. 14. Issue 10. P. 3075. DOI: 10.3390/buildings14103075. EDN QDHASA.

18. *Stambuk I., Malarić R., Bakota I., Trzun Z.* The improved measurement of building thermal transmittance in Zagreb using a temperature-based method // *Sensors*. 2025. Vol. 25. Issue 11. P. 3456. DOI: 10.3390/s25113456. EDN AWEBTY.

19. *Малыгина О.А.* Разработка математических моделей определения тепловлажностного режима ограждающих конструкций зданий при нестационарном тепловом потоке // *Современные проблемы гражданской защиты*. 2024. № 3 (52). С. 93–104. EDN NNKWXJ.

20. *Ерофеев В.Т., Ельчищева Т.Ф.* Изменение влажности и теплопроводности строительных материалов при наличии в их составе солей // *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*. 2020. № 4 (388). С. 18–27. EDN CWNJDF.

21. *Takatori N., Ogura D., Wakiya S.* Simultaneous heat, moisture, and salt transfer in porous building materials considering osmosis flow: Part 1: Theoretical modeling based on nonequilibrium thermodynamics // *Journal of Building Physics*. 2024. Vol. 48. Issue 2. Pp. 129–167. DOI: 10.1177/17442591241266835. EDN PJHFAF.

22. *Wiehle P., Härder M., Strangfeld C.* Quantification of moisture content in earth block masonry under natural climatic conditions // *Construction and Building Materials*. 2025. Vol. 459. P. 139513. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2024.139513. EDN ZLCIEW.

23. *Мусорина Т.А., Петриченко М.Р.* Математическая модель тепломассопереноса в пористом теле // *Строительство: наука и образование*. 2018. Т. 8. № 3 (29). С. 3. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.3.3. EDN MFXMEX.

24. *Metals M., Lesinskis A., Borodinecs A., Turauskis K.* Study on indoor air temperature and moisture behaviour in historical churches // *Energy and Buildings*. 2024. Vol. 310. P. 114083. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114083. EDN SLSODE.

25. *Petropavlovskaya V.B., Petropavlovskii K.S., Novichenkova T.B., Klyuev S.V., Vasilev Y.E., Ignatyev A.A.* Fine-grained cement concrete with compressed structure, modified with basalt technogenic highly dispersed

powder // *Construction Materials and Products*. 2025. Vol. 8. Issue 4. DOI: 10.58224/2618-7183-2025-8-4-2. EDN EVFVEA.

26. *Klyuev S.V., Ayubov N.A., Fomina E.V., Ageeva M.S., Klyuev A.V., Nedoseko I.V.* Influence of carbon black additives and finely ground waste from stone wool production on characteristics of cement systems // *Construction Materials and Products*. 2025. Vol. 8. Issue 4. DOI: 10.58224/2618-7183-2025-8-4-8. EDN GXNOHH.

27. *Beskopylny A.N., Stel'makh S.A., Shcherban' E.M., Dolgov V., Beskopylny N., Elshaeva D. et al.* Defects identification and crack depth determination in porous media on the brick masonry example using ultrasonic methods: numerical analysis and machine learning // *Journal of Composites Science*. 2025. Vol. 9. Issue 6. P. 267. DOI: 10.3390/jcs9060267. EDN QVVASO.

28. *Alassaf Y.* Comprehensive review of the advancements, benefits, challenges, and design integration of energy-efficient materials for sustainable buildings // *Buildings*. 2024. Vol. 14. Issue 9. P. 2994. DOI: 10.3390/buildings14092994. EDN NLHLPE.

29. *Ali A., Issa A., Elshaer A.* A comprehensive review and recent trends in thermal insulation materials for energy conservation in buildings // *Sustainability*. 2024. Vol. 16. Issue 20. P. 8782. DOI: 10.3390/su16208782. EDN JHYGNO.

30. *Salonvaara M., Desjarlais A.* Impact of insulation strategies of cross-laminated timber assemblies on energy use, peak demand, and carbon emissions // *Buildings*. 2024. Vol. 14. Issue 4. P. 1089. DOI: 10.3390/buildings14041089. EDN BJWKPQ.

31. *Rashid F.L., Dulaimi A., Hatem W.A., Al-Obaidi M.A., Ameen A., Eleiwi M.A. et al.* Recent advances and developments in phase change materials in high-temperature building envelopes: a review of solutions and challenges // *Buildings*. 2024. Vol. 14. Issue 6. P. 1582. DOI: 10.3390/buildings14061582. EDN VVJFJP.

32. *Iavorschi E., Milici L.D., Ungureanu C., Bejenar C.* A comparative evaluation of the thermal performance of passive facades with variable cavity widths for near-zero energy buildings (nZEB): a modeling study // *Applied Sciences*. 2025. Vol. 15. Issue 13. P. 7019. DOI: 10.3390/app15137019. EDN MEBMKR.

33. *Wang Y., Hu B., Meng X., Xiao R.* A comprehensive review on technologies for achieving zero-energy buildings // *Sustainability*. 2024. Vol. 16. Issue 24. P. 10941. DOI: 10.3390/su162410941. EDN KFAYJC.

34. *Chen T.Y., Sung W.P., Lee C.L.* Evaluating the impact of vertical green systems on building temperature regulation: effects of shading density and proximity // *Buildings*. 2025. Vol. 15. Issue 3. P. 445. DOI: 10.3390/buildings15030445. EDN OMWXGC.

35. *Сидоров В.Н., Примкулов А.М., Макарова Е.А.* Нелинейная связанная задача нестационарной теплопроводности в двухмерном пространстве и ее

численно-аналитическое решение // Инженерный вестник Дона. 2025. № 5 (125). С. 775–788. EDN FNREYN.

36. Сидоров В.Н., Примкулов А.М. Численно-аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности с переменными теплофизическими параметрами среды // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. № 5. С. 685–696. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.5.685-696. EDN JWFVJ.

37. Радаев А.Е., Гамаюнова О.С., Бардина Г.А. Использование средств оптимизационного моделирования для обоснования характеристик энергоэффективного конструктивного решения // Строительство и техногенная безопасность. 2022. № 27 (79). С. 5–25. EDN EXVSFS.

38. Радаев А.Е., Гамаюнова О.С. Обоснование характеристик многослойной стеновой конструкции с использованием средств квадратичного программирования // Строительство и техногенная безопасность. 2021. № 22 (74). С. 111–127. DOI: 10.37279/2413-1873-2021-22-111-127. EDN ORVFEG.

39. Стельмах С.А., Альков М.А., Кондратенко Т.О., Тютина А.Д., Котенко М.П. Обзор и анализ мирового опыта и проблематики информационного моделирования на этапе проектирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика. 2023. № 3 (51). С. 28–44. DOI: 10.15593/2409-5125/2023.03.02. EDN WBFTUE.

40. Чакин Е.Ю., Гамаюнова О.С. Методика выбора энергоэффективных теплоизоляционных материалов с помощью среды визуального программирования Dупато // Известия Юго-Западного государственного университета. 2024. Т. 28. № 3. С. 50–68. DOI: 10.21869/2223-1560-2024-28-3-50-68. EDN JLYHOU.

41. Diao R., Cao Y., Sun L., Xu C., Yang F. Optimization of the energy-saving building envelopes in regional climate // Buildings. 2024. Vol. 14. Issue 2. P. 320. DOI: 10.3390/buildings14020320. EDN MXNQIY.

42. Zhu S., Ma C., Wu Z., Huang Y., Liu X. Exploring the impact of urban morphology on building energy

consumption and outdoor comfort: a comparative study in hot-humid climates // Buildings. 2024. Vol. 14. Issue 5. P. 1381. DOI: 10.3390/buildings14051381. EDN SVJAZH.

43. Zhong L., Wu D., Zhang Bo., Chen L., Xie Y., Zhang Y. et al. Study on the impact of design parameters of photovoltaic combined vacuum glazing (PVCVG) on the energy consumption of buildings in Lhasa // Buildings. 2025. Vol. 15. Issue 4. P. 649. DOI: 10.3390/buildings15040649. EDN PSWDHF.

44. Sun Z., Gao Y., Yang J., Chen Y., Guo B.H. Development of urban building energy models for Wellington city in New Zealand with detailed survey data on envelope thermal characteristics // Energy and Buildings. 2024. Vol. 321. P. 114647. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114647. EDN ZQLDBU.

45. Brunoro S. Passive envelope measures for improving energy efficiency in the energy retrofit of buildings in Italy // Buildings. 2024. Vol. 14. Issue 7. P. 2128. DOI: 10.3390/buildings14072128. EDN HYUTEW.

46. Zhang Y., Omer S., Hu R. Impact of window size modification on energy consumption in UK residential buildings: a feasibility and simulation study // Sustainability. 2025. Vol. 17. Issue 7. P. 3258. DOI: 10.3390/su17073258. EDN LWWCUX.

47. Колесникова А.В. Теплоперенос в неоднородных монолитно возводимых наружных стенах зданий с фасадным утеплением : дисс. ... канд. техн. наук. Томск, 2006. 199 с.

48. Пульдас Л.А. Нестационарные тепловые режимы в гражданских зданиях : дисс. ... канд. техн. наук. Тюмень, 2008. 146 с. EDN NQCVBB.

49. Мирошниченко Т.А. Нестационарный тепло- и влагоперенос в многослойных наружных ограждениях с включениями : дисс. ... канд. техн. наук. Томск, 2006. 224 с. EDN NOJHDD.

50. Котлярова Н.С. Моделирование температурных полей в ограждающих конструкциях в зоне установки отопительного прибора : дисс. ... канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 1998. 143 с.

Поступила в редакцию 28 января 2026 г.

Принята в доработанном виде 8 февраля 2026 г.

Одобрена для публикации 13 февраля 2026 г.

**ОБ АВТОРАХ:** Кирилл Павлович Зубарев — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры общей и прикладной физики, доцент кафедры информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ);** 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; старший научный сотрудник лаборатории строительной теплофизики; **Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ РААСН);** 127238, г. Москва, Локомотивный проезд, д. 21; доцент кафедры технологий строительства и конструктивных материалов, ведущий научный сотрудник научного центра техники и технологий строительства; **Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (РУДН);** 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; zubarevkirill93@mail.ru;

Михаил Валерьевич Емельянов — кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем, технологий и автоматизации в строительстве; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ);** 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; Emelianov@mgsu.ru;

**Юлия Александровна Сапронова** — лаборант-исследователь Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов им. А.Б. Золотова; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ho5metown@gmail.com;

**Виктор Львович Добшиц** — аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов; **Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (РУДН)**; 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; 89153383886@mail.ru;

**Никита Юрьевич Заварзин** — аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов; **Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (РУДН)**; 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; nike.zavar@yandex.ru;

**Вячеслав Владимирович Казунин** — аспирант кафедры технологий строительства и конструкционных материалов; **Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы (РУДН)**; 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; kvv-vyacheslav@yandex.ru.

*Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.*

*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## INTRODUCTION

The study of the temperature distribution in various building envelope components is a key issue in the construction industry. It is the thermal state of the building envelope that influences the thermal resistance, heat loss and, consequently, the energy conservation and energy efficiency of a building [1–5]. A properly calculated temperature regime for the building envelope leads to the creation of favourable indoor temperature conditions [6–9], which contributes to an improved quality of life [10].

Any study of heat transfer in various building envelopes must take their specific characteristics into account. Heat transfer is calculated in fundamentally different ways for walls [11, 12], roofs [13] and translucent building envelopes [14, 15]. The thermal behaviour of opaque structures can be analyzed either using the heat conduction equation [16–18], or it may be complicated by moisture transfer [19–24]. Calculations for translucent enclosing structures are carried out taking into account indoor lighting comfort, as well as the need to account for the air gap between windows [14]. The development of various methods for calculating thermal conditions is relevant in the context of the emergence of new structural [25–27] and thermal insulation materials [28–30]. For example, in hot countries, buildings incorporating phase-change materials are used [31]. New types of structures are also being built. Of particular importance are developments in zero-energy buildings [32, 33] and issues relating to green building [34].

Mathematical modelling of thermal conditions is carried out both through the development of computer programmes [35, 36] and the use of software packages [37–40]. The most complex calculation scenarios arise when it is necessary to model various building components, such as window reveals, the junctions between columns and roofs, and so on. Climatic conditions vary across different construction regions, creating unique

boundary conditions for temperature fields [41, 42]. Scientists worldwide are conducting separate studies on the thermal regimes of building envelopes constructed in different countries. Examples include studies of heat transfer in buildings in China [43], New Zealand [44], Italy [45] and the United Kingdom [46].

The aim of this study is to review the literature on methods for the mathematical modelling of temperature fields in building envelopes.

## MATERIALS AND METHODS

The literature review involved the study and description of Russian and foreign sources. Russian articles from the Higher Attestation Commission (HAC) list and PhD theses in technical sciences were used, as per the database<sup>1</sup>. Foreign sources indexed in international databases (Scopus and Web of Science) were described. Bibliographical references are provided for the works of all authors.

## RESEARCH RESULTS

### Mathematical model of a non-stationary temperature field in a two-dimensional formulation

A.V. Kolesnikova proposed using the physical-mathematical model shown in Fig. 1 to describe non-stationary two-dimensional heat transfer in a non-homogeneous expanded clay concrete section [47].

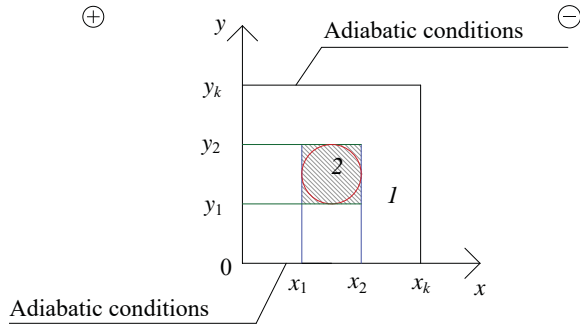
Heat transfer in regions 1 and 2 (Fig. 1) is described by the following equations [47]:

$$(\rho c)_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial y} \right), \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$t_i|_{\tau=0} = \tau_{i,0}(x, y), \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (t_{i,0} - t_1|_{x=0}); \quad (3)$$

<sup>1</sup> Dissercat. URL: <https://www.dissercat.com/>



**Fig. 1.** Cross-section of a wall section based on data by A.V. Kolesnikova: 1 — structural material; 2 — insulation [47]

$$\lambda_{\square} \frac{\partial t_{\square}}{\partial x} \Big|_{x=X_K} = \alpha_{\square} t_{g,e} - t_{\square} \Big|_{x=X_K} \quad (4)$$

$$\frac{\partial t_{\square}}{\partial y} \Big|_{y=\square} = \square \quad (5)$$

$$\frac{\partial t_{\square}}{\partial y} \Big|_{y=Y_K} = \square \quad (6)$$

$$t_1 \Big|_{x=X_1=t_2} \Big|_{x=X_1}, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_1}, \quad (7)$$

$$Y_1 \leq y \leq Y_2;$$

$$t_1 \Big|_{x=X_2=t_2} \Big|_{x=X_2}, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_2} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_2}, \quad (8)$$

$$Y_1 \leq y \leq Y_2 \square$$

$$t_1 \Big|_{y=Y_1=t_2} \Big|_{y=Y_1}, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} \Big|_{y=Y_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} \Big|_{y=Y_1}, \quad (9)$$

$$X_1 \leq x \leq X_2 \square$$

$$t_1 \Big|_{y=Y_2=t_2} \Big|_{y=Y_2}, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y} \Big|_{y=Y_2} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y} \Big|_{y=Y_2}, \quad (10)$$

$$X_1 \leq x \leq X_2,$$

where  $\rho$  — is the density of the layer,  $\text{kg/m}^3$ ;  $t_{g,ins}$  — is the ambient temperature,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $t_{g,e}$  — is the outside air temperature,  $^{\circ}\text{C}$ .

The author then presents the graph shown in Fig. 2, which illustrates the temperature distribution within a non-uniform section. The maximum disturbance of the temperature field is observed at the interface between the insulation and the expanded clay concrete [47].

A graph of the heat flux (Fig. 3) for a non-uniform wall and a uniform wall at different points in time is provided [47].

According to the study, the time taken for the structure under investigation to reach steady state was 60 hours [47].

### A thermophysical model of the transient temperature field in civil buildings

In the work by L.A. Puldas, a thermophysical model was developed that took into account the following features: the multi-layered nature of building envelope structures; the non-stationary nature of thermophysical processes; the solution of the problem in two-dimensional and three-dimensional formulations; the presence of moisture and gaseous phases; and phase transitions in a multi-phase medium. The three-dimensional formulation was used to analyze processes in the corner sections of buildings [48].

The proposed model also took into account the mass balance of each individual phase: gas (mixtures of ideal gases), water, and ice. The equations can be written as follows [48]:

- for water vapour:

$$\frac{\rho_{nij}^{(n+1)} + \rho_{nij}^{(n)}}{\Delta t} \cdot V_{ij} = - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \rho_{nij} \cdot v_{ijk}^{nk} \cdot \Delta S_{ijk} + I_{in} \cdot V_{ij}; \quad (11)$$

- for air:

$$\frac{\rho_{\square ij}^{(n+1)} + \rho_{\square ij}^{(n)}}{\Delta t} \cdot V_{ij} = - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \rho_{\square ij} \cdot v_{\square ijk}^{nk} \cdot \Delta S_{ijk}; \quad (12)$$

- for water:

$$\frac{\rho_{lij}^{(n+1)} + \rho_{lij}^{(n)}}{\Delta t} \cdot V_{ij} = - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \rho_{lij} \cdot v_{lij}^{nk} \cdot \Delta S_{ijk} + I_{nl} \cdot V_{ij} + I_{Sl} \cdot V_{ij}; \quad (13)$$

- for ice:

$$\frac{\rho_{\square i\square}^{(n+1)} + \rho_{\square i\square}^{(n)}}{\Delta t} \cdot \square_{i\square} = \square_{\square\square} \cdot \square_{i\square}; \quad (14)$$

The author derives the internal energy balance equation for a multiphase medium [48]:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\rho_i \cdot U_i^{(n+1)}) - \sum_{i=1}^N (\rho_i \cdot U_i^{(n)})}{\Delta t} \cdot V_{ij} =$$

$$= - \sum_{k=1}^{k=4(6)} \sum_{i=1}^N (\rho_i \cdot v_i^{nk} \cdot U_i)_k \cdot \Delta S_k - \sum_{k=1}^{k=4(6)} q_k^{nk} \cdot \Delta S_k.$$

Initial distribution of parameter temperatures at time  $t = 0$  [48]:

$$T = T_0(t_0, x, y); \quad (16)$$

$$\rho_n^{(v_s)} = \rho_{n0}^{(v_s)}(t_0, x, y); \quad (17)$$

$$\rho_{\square}^{(v_s)} = \rho_{\square 0}^{(v_s)}(t_0, x, y); \quad (18)$$

$$\rho_l = \rho_l(t_0, x, y); \quad (19)$$

$$\rho_s = \rho_s(t_0, x, y). \quad (20)$$

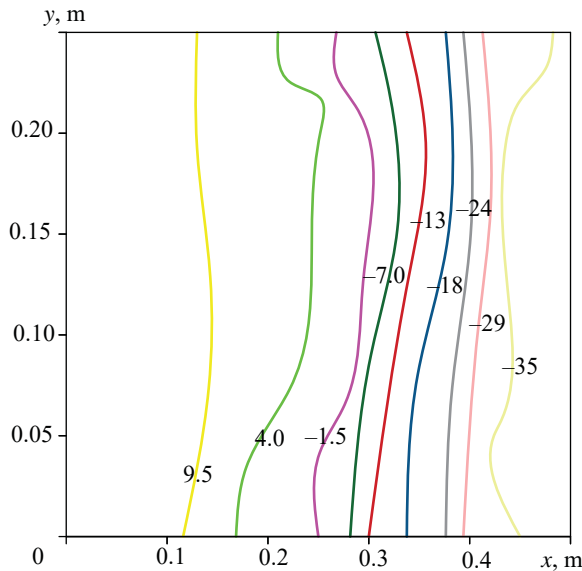


Fig. 2. Isotherms in a cross-section of a non-homogeneous expanded clay concrete wall section at  $\tau = 168$  h, based on data by A.V. Kolesnikova [47]

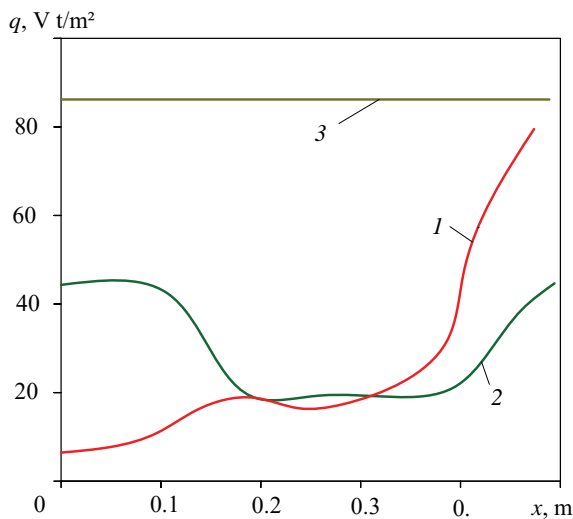


Fig. 3. Distribution of heat flux densities along the  $x$ -direction in the  $Y_k/2$  cross-section for a non-homogeneous (1, 2) and homogeneous (3) expanded clay concrete wall at various times  $t$ , h: 1 — 12; 2, 3 — 168, based on data by A.V. Kolesnikova [47]

**A mathematical model of unsteady heat and moisture transfer in multi-layer building envelopes with inclusions**

T.A. Miroshnichenko investigates the influence of cylindrical thermal inhomogeneities on the temperature field of a three-layer building envelope consisting of brick-work on both sides and insulation in the centre of the wall [49].

The problem is solved using a cylindrical coordinate system. A schematic diagram is shown in Fig. 4 [49].

The computational geometric domain is divided into four subdomains [49]. Heat transfer in each of the subdomains is described by a non-linear, non-stationary two-dimensional heat conduction equation [49]:

$$(\rho c)_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial x}), \quad (21)$$

$$i = \overline{1,4}, x, r, \tau \in D;$$

$$t_i|_{\tau=0} = t_{i,in}(x), \quad x \in \overline{D}, i = \overline{1,4} \quad (22)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_0 (t_{g,ins} - t_0), \quad 0 \leq r \leq R_k; \quad (23)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{x=X_k} = \alpha_w (t_{g,e} - t_w), \quad 0 \leq r \leq R_k; \quad (24)$$

$$\frac{\partial t_i}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad i = 1, 3, 4, \quad 0 \leq x \leq X_k; \quad (25)$$

$$\frac{\partial t_i}{\partial r} \Big|_{r=R_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad 0 \leq x \leq X_k; \quad (26)$$

$$t_1 \Big|_{x=X_1} = t_1 \Big|_{x=X_1}, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_1} = \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial x} \Big|_{x=X_1}, \quad 0 \leq r \leq R \quad (27)$$

$$t_4 \Big|_{x=X_4} = t_3 \Big|_{x=X_4}, \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial x} \Big|_{x=X_4} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{x=X_4}, \quad (28)$$

$$0 \leq r \leq R \quad \square$$

$$t_1 \Big|_{x=X_2} = t_2 \Big|_{x=X_2}, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=X_2} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_2}, \quad (29)$$

$$R \leq r \leq R_k \quad \square$$

$$t_2 \Big|_{x=X_3} = t_3 \Big|_{x=X_3}, \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=X_3} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x} \Big|_{x=X_3}, \quad (30)$$

$$R \leq r \leq R_k;$$

$$t_4 \Big|_{r=R} = t_1 \Big|_{r=R}, \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial r} \Big|_{r=R} = \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (31)$$

$$X_1 \leq x \leq X_2;$$

$$t_4 \Big|_{r=R} = t_2 \Big|_{r=R}, \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial r} \Big|_{r=R} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (32)$$

$$X_2 \leq x \leq X_3;$$

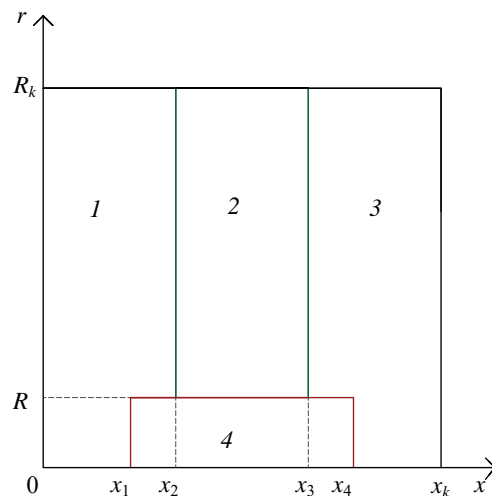
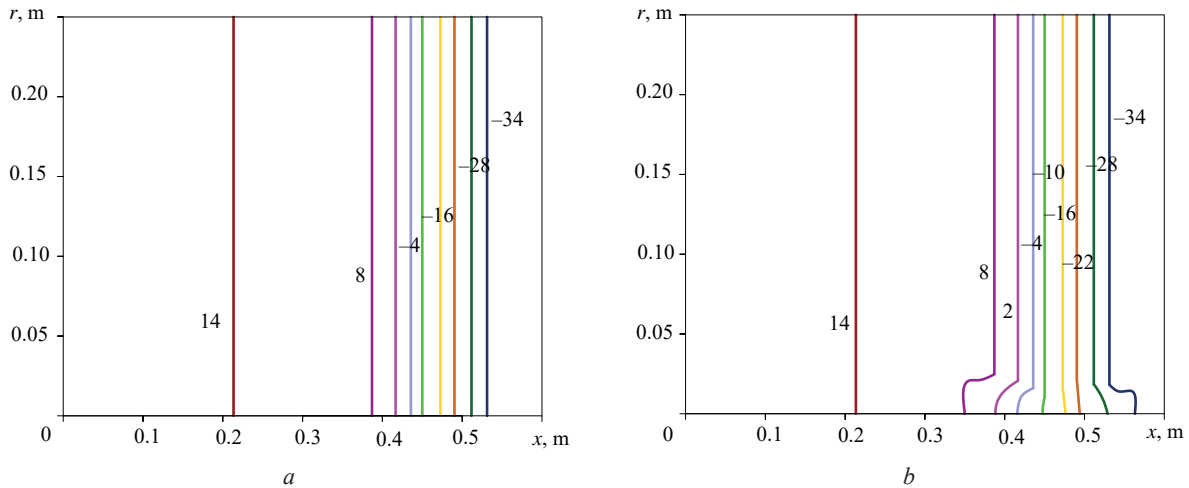


Fig. 4. Diagram of a three-layer external barrier with a connector: 1–3 — inner, middle and outer layers of the barrier; 4 — connector, according to T.A. Miroshnichenko [49]



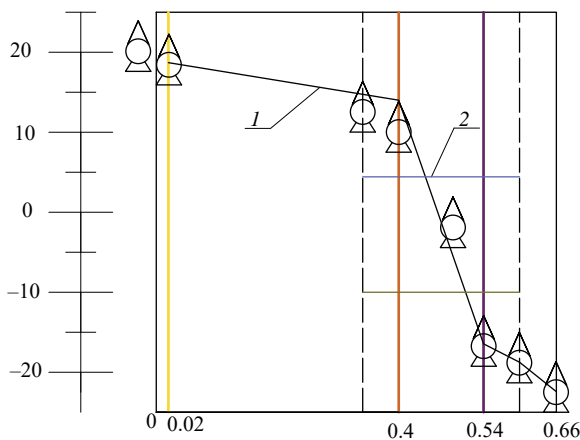
**Fig. 5.** Isotherm field in a three-layer building envelope: *a* — without a connector at  $\tau_{\min} = 24$  h; *b* — with a connector at  $\tau_{\min} = 24$  h, according to data by T.A. Miroshnichenko [49]

$$t_4 \Big|_{r=R} = t_3 \Big|_{r=R}, \lambda_4 \frac{\partial t_4}{\partial r} \Big|_{r=R} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (33)$$

$$X_3 \leq x \leq X_4, \tau \in [0, \tau_{fin}].$$

The problem was solved numerically using N.N. Yanenko’s splitting method. Two stages were considered at each time step. First, the one-dimensional problem in the *r*-direction was solved, whilst heat transfer in the *x*-direction was not taken into account. Then, the one-dimensional problem in the *x*-direction was solved, whilst heat transfer in the *r*-direction was not taken into account. The author then applies the iterative-interpolation method (IIM) to solve the problem analytically. The solution for unsteady heat transfer was verified on refining grids in space and time. The isothermal field in a three-layer structure with and without a connector is shown in Fig. 5 [49].

The author conducted an experiment to determine the temperature fields and thermal insulation properties of the materials. The tests were carried out in a laboratory in a climatic chamber consisting of a cold zone



**Fig. 6.** Temperature distribution pattern in a wall with connector 2, based on data by T.A. Miroshnichenko (*1* — approximate relationship) [49]

with a volume of 30 m<sup>3</sup> and a warm zone with a volume of 28 m<sup>3</sup>; a section of a three-layer building envelope structure measuring 2,450 × 2,800 × 660 mm was constructed. Fibreglass temperature sensors were installed at a distance of 380 mm from one another [49].

The test results are shown in Fig. 6 and 7 [49].

**Mathematical formulation of the problem for the temperature field in building envelopes in the area where a heating appliance is installed**

A mathematical model and computer program for determining three-dimensional temperature fields and additional heat losses in the area where a steel panel radiator is installed were developed by N.S. Kotlyarova [50].

To solve the problem of local heating, the author applies the source method, which is based on the principle of superposition of temperature fields [50]:

$$\frac{\partial \square}{\partial \tau} = \square \nabla^2 \square \quad (34)$$

To obtain an analytical solution using the source method, a ready-made solution is used to determine the temperature at any point and at any time in a body that is unbounded along the *x*, *y* and *z* axes [50]:

$$t(R, \tau) = \frac{Q}{c\rho(4\pi a\tau)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right). \quad (35)$$

The author derives analytical solutions for determining the temperature field of a building envelope heated by a heating appliance [50].

N.S. Kotlyarova then considers a single-layer building envelope in the form of an unbounded plate along the *x* and *y* axes of thickness  $\delta$ , as shown in Fig. 8 [50].

A non-uniformly distributed heat source, varying according to a specific law, is applied to surface *z*. The differential equation and boundary conditions [50]:

$$\frac{\partial \square}{\partial \tau} = \square \left( \frac{\partial^2 \square}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \square}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \square}{\partial z^2} \right); \quad (36)$$

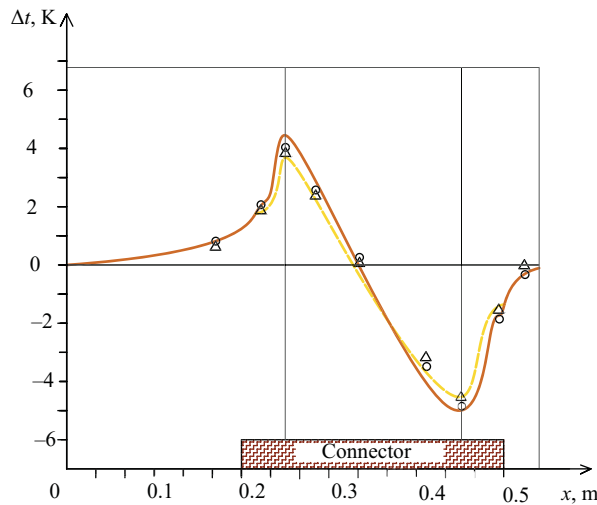


Fig. 7. Distribution of temperature differences according to data by T.A. Miroshnichenko [49]

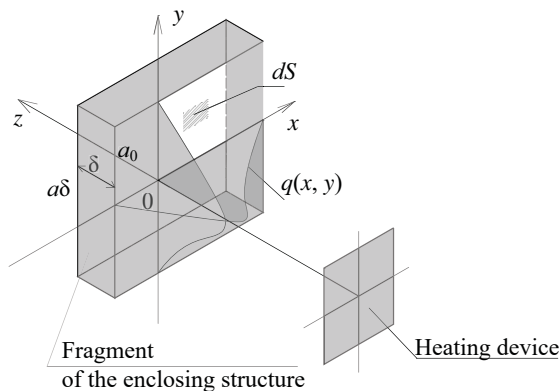


Fig. 8. Diagram showing the heating of the inner surface of an enclosure by a surface-distributed heat source (heating appliance), based on data from N.S. Kotlyarova [50]

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = q(0,0) \exp(-k_1 x^2 - k_2 y^2) + \alpha_0 (t_{a.ext} - t_{a.in}); \quad (37)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=\delta} = \alpha_\delta (t_{g.ext} - t_{a.ext}); \quad (38)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=-\infty} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=-\infty} = \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=+\infty} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=+\infty} = 0 \quad (39)$$

$$t(x, y, z, 0) = t_0. \quad (40)$$

### CONCLUSION AND DISCUSSION

A.V. Kolesnikova has proposed a physical-mathematical model to describe unsteady two-dimensional heat transfer in a heterogeneous region. This model is

described by a non-linear two-dimensional transient heat conduction equation, which the author proposes to solve using N.N. Yanenko’s splitting method. As a result, the author presents graphs of the temperature distribution in a heterogeneous fragment; according to the study, the time to reach steady state was 60 hours.

L.A. Puldas examined a multi-factor problem and developed a thermophysical model that took into account the multi-layered nature of structures, the transient nature of processes, and the presence of moisture and gaseous media. Mass balance equations were also derived for each individual phase: gas, water and ice. As a result, an internal energy balance equation for the multiphase medium was obtained.

The mathematical model and software used to determine the three-dimensional temperature field and additional heat losses were developed by N.S. Kotlyarova. To solve the problem, the author applies the source method, which is based on the principle of superposition of temperature fields. A single-layer building envelope in the form of an unbounded plate along the x and y axes of thickness δ is considered, and the differential equation and boundary conditions for the inner surface of the envelope with a surface normally distributed heat source are derived.

T.A. Miroshnichenko solves the problem of the influence of a cylindrical connector on the thermal state of a three-layer building envelope in a cylindrical coordinate system. Heat transfer in each of the regions can be described by a non-linear, non-stationary, two-dimensional heat conduction equation. The problem was solved numerically using N.N. Yanenko’s splitting method. Each step consisted of two stages: a one-dimensional problem was solved in the r-direction, with heat transfer in the x-direction ignored; then the problem was solved in the x-direction, with heat transfer in the r-direction ignored.

A review of the literature has shown that the optimal method for determining the temperature distribution within a building’s envelope is to use a non-linear two-dimensional or three-dimensional transient heat conduction equation. In the case of complex object geometry, it is possible to divide the space-time domain into a number of sub-domains with their own boundary conditions, and to break down the overall thermal problem into a series of sub-problems. For a coupled problem, a number of equations can be added to the heat conduction equation, for example, equations governing the transport of water vapour, air, water and ice. In a number of cases, it is effective to replace the classical Cartesian coordinate system with a cylindrical one.

### REFERENCES

1. Vatin N., Gamayunova O. Energy efficiency and energy audit: the experience of the Russian Federation and the Republic of Belarus. *Advanced Materials Research*. 2014; 1065-1069:2159-2162. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1065-1069.2159. EDN BMRHDG.

2. Zaborova D., Musorina T. Environmental and energy-efficiency considerations for selecting building envelopes. *Sustainability*. 2022; 14(10):5914. DOI: 10.3390/su14105914. EDN IXJBWJ.
3. Alhawari A., Mukhopadhyaya P. Mitigating balcony thermal bridging: Experimental and numerical investigation of innovative solutions for energy-efficient building envelopes. *Energy and Buildings*. 2025; 328:115152. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.115152. EDN PGXTIW.
4. Kalwry H., Atakara C. Exploring energy-efficient design strategies in high-rise building facades for sustainable development and energy consumption. *Buildings*. 2025; 15(7):1062. DOI: 10.3390/buildings15071062. EDN NEQQOM.
5. Zhangabay N., Oner A., Rakhimov M., Tursunkululy T., Abdikerova U. Thermal performance evaluation of a retrofitted building with adaptive composite energy-saving facade systems. *Energies*. 2025; 18(6):1402. DOI: 10.3390/en18061402. EDN DEAVUO.
6. Yu J., Lu Y., Hu J., Zhong K., Jia T., Yang X. Prediction models for building thermal mass of intermittently heated rooms for balancing energy consumption and indoor thermal comfort. *Energy and Buildings*. 2024; 317:114376. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114376. EDN YMISDG.
7. Shchukina T.V., Kurasov I.S., Nikolskaya N.G. Constructive solutions of energy-active external fences with an estimated justification of heat gain from solar radiation into the premises. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2025; 147-156. DOI: 10.1007/978-3-031-80482-3\_15
8. Shchukina T.V., Kurasov I.S., Drapaliuk D.A., Popov P. Improving the energy efficiency of buildings based on the use of integrated solar wall panels. *E3S Web of Conferences*. 2021; 244:05009. DOI: 10.1051/e3sconf/202124405009. EDN OELQSM.
9. Zhangabay N., Zhangabay A., Utebayeva A., Tursunkululy T., Sultanov M., Kolesnikov A. Energy-Efficient Outdoor Fencing with Air Layers: A Review of the Effect of Solar Radiation on the Exterior Fencing of Buildings Made of Composite Material. *Journal of Composites Science*. 2025; 9(1):9. DOI: 10.3390/jcs9010009. EDN BYXUWN.
10. Kotlyarova E. Improving the methodology for assessing the level of environmental safety of urban areas as the basis of their life cycle. *E3S Web of Conferences*. 2023; 09062. DOI: 10.1051/e3sconf/202338909062. EDN UZBTZM.
11. Musorina T.A., Petrichenko M.R., Zaborova D.D., Gamayunova O.S. Determination of active and reactive thermal resistance of one-layer building envelopes. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020; 15(8):1126-1134. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.8.1126-1134. EDN CLTIYY. (rus.).
12. Kokaya D., Zaborova D., Koriakovtseva T. Environmental analysis of residential exterior wall construction in temperate climate. *Magazine of Civil Engineering*. 2023; 8(124). DOI: 10.34910/MCE.124.10. EDN HNNOQM.
13. Saba M., Coronado-Hernández O.E., Gil L.K.T. Energy efficiency in subtropical homes: replacing asbestos-cement roofs with sustainable alternatives. *Buildings*. 2024; 14(12):4082. DOI: 10.3390/buildings14124082. EDN WAGYVW.
14. Korkina E.V. The main ratio for evaluating energy savings when using glazing with low-emission coatings. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2025; 4(796):132-137. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-796-4-132-137. EDN TAXFPZ.(rus.).
15. Shah B., Bhandari M., Tang M. Importance of window installation in residential building envelopes having continuous external insulation in order to realize energy efficiency. *Energies*. 2024; 17(17):4273. DOI: 10.3390/en17174273. EDN IFBQNO.
16. Dornyak O.R., Nedonoskov A.B. Heat Transfer in a Three-Layer Strain Joint System at Microwave Heating. *Optics and Spectroscopy*. 2024; 132(1):1-8. DOI: 10.1134/S0030400X24700279. EDN KWNUUQ.
17. Moctezuma-Sánchez M., Espinoza Gomez D., López-Sosa L.B., Golpour I., Morales-Máximo M., González-Carabes R. A Thermal model for rural housing in Mexico: towards the construction of an internal temperature assessment system using aerial thermography. *Buildings*. 2024; 14(10):3075. DOI: 10.3390/buildings14103075. EDN QDHASA.
18. Stambuk I., Malarić R., Bakota I., Trzun Z. The improved measurement of building thermal transmittance in Zagreb using a temperature-based method. *Sensors*. 2025; 25(11):3456. DOI: 10.3390/s25113456. EDN AWEBTY.
19. Malygina O.A. Development of mathematical models of definition heat and humidity conditions of building enclosing structures with nonstationary heat flow. *Modern Problems of Civil Defense*. 2024; 3(52):93-104. EDN NNKWXJ. (rus.).
20. Erofeev V.T., Elchishcheva T.F. Change of humidity and thermal conductivity of building materials when available in their composition of salts. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Textile Industry Technology*. 2020; 4(388):18-27. EDN CWNJDF. (rus.).
21. Takatori N., Ogura D., Wakiya S. Simultaneous heat, moisture, and salt transfer in porous building materials considering osmosis flow: Part 1: Theoretical modeling based on nonequilibrium thermodynamics. *Journal of Building Physics*. 2024; 48(2):129-167. DOI: 10.1177/17442591241266835. EDN PJHFAF.
22. Wiehle P., Härder M., Strangfeld C. Quantification of moisture content in earth block masonry under natural climatic conditions. *Construction and Building*

- Materials*. 2025; 459:139513. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2024.139513. EDN ZLCIEW.
23. Musorina T.A., Petrichenko M.R. Mathematical model of heat and mass transfer in porous body. *Construction: science and education*. 2018; 8(3):(29):3. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.3.3. EDN MFXMEX. (rus.).
24. Metals M., Lesinskis A., Borodinecs A., Turauskis K. Study on indoor air temperature and moisture behaviour in historical churches. *Energy and Buildings*. 2024; 310:114083. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114083. EDN SLSODE.
25. Petropavlovskaya V.B., Petropavlovskii K.S., Novichenkova T.B., Klyuev S.V., Vasilev Y.E., Ignatyev A.A. Fine-grained cement concrete with compressed structure, modified with basalt technogenic highly dispersed powder. *Construction Materials and Products*. 2025; 8(4). DOI: 10.58224/2618-7183-2025-8-4-2. EDN EVFVEA.
26. Klyuev S.V., Ayubov N.A., Fomina E.V., Ageeva M.S., Klyuev A.V., Nedoseko I.V. Influence of carbon black additives and finely ground waste from stone wool production on characteristics of cement systems. *Construction Materials and Products*. 2025; 8(4). DOI: 10.58224/2618-7183-2025-8-4-8. EDN GXNOHH.
27. Beskopylny A.N., Stel'makh S.A., Shcherban' E.M., Dolgov V., Beskopylny N., Elshaeva D. et al. Defects identification and crack depth determination in porous media on the brick masonry example using ultrasonic methods: numerical analysis and machine learning. *Journal of Composites Science*. 2025; 9(6):267. DOI: 10.3390/jcs9060267. EDN QVVASO.
28. Alassaf Y. Comprehensive review of the advancements, benefits, challenges, and design integration of energy-efficient materials for sustainable buildings. *Buildings*. 2024; 14(9):2994. DOI: 10.3390/buildings14092994. EDN NLHLPE.
29. Ali A., Issa A., Elshaer A. A comprehensive review and recent trends in thermal insulation materials for energy conservation in buildings. *Sustainability*. 2024; 16(20):8782. DOI: 10.3390/su16208782. EDN JHYGNO.
30. Salonvaara M., Desjarlais A. Impact of insulation strategies of cross-laminated timber assemblies on energy use, peak demand, and carbon emissions. *Buildings*. 2024; 14(4):1089. DOI: 10.3390/buildings14041089. EDN BJWKPQ.
31. Rashid F.L., Dulaimi A., Hatem W.A., Al-Obaidi M.A., Ameen A., Eleiwi M.A. et al. Recent advances and developments in phase change materials in high-temperature building envelopes: a review of solutions and challenges. *Buildings*. 2024; 14(6):1582. DOI: 10.3390/buildings14061582. EDN VFVJFP.
32. Iavorschi E., Milici L.D., Ungureanu C., Bejenar C. A comparative evaluation of the thermal performance of passive facades with variable cavity widths for near-zero energy buildings (nZEB): a modeling study. *Applied Sciences*. 2025; 15(13):7019. DOI: 10.3390/app15137019. EDN MEBMKR.
33. Wang Y., Hu B., Meng X., Xiao R. A comprehensive review on technologies for achieving zero-energy buildings. *Sustainability*. 2024; 16(24):10941. DOI: 10.3390/su162410941. EDN KFAYJC.
34. Chen T.Y., Sung W.P., Lee C.L. Evaluating the impact of vertical green systems on building temperature regulation: effects of shading density and proximity. *Buildings*. 2025; 15(3):445. DOI: 10.3390/buildings15030445. EDN OMWXGC.
35. Sidorov V.N., Primkulov A.M., Makarova E.A. Non-linear coupled transient heat transfer problem and its semi analytical solution in 2d space. *Engineering journal of Don*. 2025; 5(125):775-788. EDN FNREYN. (rus.).
36. Sidorov V.N., Primkulov A.M. Semi-analytical solution to steady-state and transient heat transfer problem with variable conductivity properties of the domain. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2023; 18(5):685-696. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.5.685-696. EDN JWFVJ. (rus.).
37. Radaev A.E., Gamayunova O.S., Bardina G.A. Use of optimization modeling tools to justify the characteristics of energy efficient structural solution. *Construction and Industrial Safety*. 2022; 27(79):5-25. EDN EXVSFS. (rus.).
38. Radaev A.E., Gamayunova O.S. Determination of the characteristics for a multilayer wall's structure with application of quadratic programming tools. *Construction and Industrial Safety*. 2021; 22(74):111-127. DOI: 10.37279/2413-1873-2021-22-111-127. EDN ORVFEG. (rus.).
39. Stel'makh S., Al'kov M., Kondratenko T., Tyutina A., Kotenko M. Review and analysis of world experience and problems of information modeling at the design stage. *PNRPU Bulletin. Applied ecology. Urban development*. 2023; 3(51):28-44. DOI: 10.15593/2409-5125/2023.03.02. EDN WBFTUE. (rus.).
40. Chakin E.Y., Gamayunova O.S. Methodology for selecting energy-efficient thermal insulation materials using the dynamo visual programming environment. *Proceedings of Southwest State University*. 2024; 28(3):50-68. DOI: 10.21869/2223-1560-2024-28-3-50-68. EDN JLYHOU. (rus.).
41. Diao R., Cao Y., Sun L., Xu C., Yang F. Optimization of the energy-saving building envelopes in regional climate. *Buildings*. 2024; 14(2):320. DOI: 10.3390/buildings14020320. EDN MXNQIY.
42. Zhu S., Ma C., Wu Z., Huang Y., Liu X. Exploring the impact of urban morphology on building energy consumption and outdoor comfort: a comparative study in hot-humid climates. *Buildings*. 2024; 14(5):1381. DOI: 10.3390/buildings14051381. EDN SVJAZH.
43. Zhong L., Wu D., Zhang Bo., Chen L., Xie Y., Zhang Y. et al. Study on the impact of design parameters

of photovoltaic combined vacuum glazing (PVCVG) on the energy consumption of buildings in Lhasa. *Buildings*. 2025; 15(4):649. DOI: 10.3390/buildings15040649. EDN PSWDHF.

44. Sun Z., Gao Y., Yang J., Chen Y., Guo B.H. Development of urban building energy models for Wellington city in New Zealand with detailed survey data on envelope thermal characteristics. *Energy and Buildings*. 2024; 321:114647. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114647. EDN ZQLDBU.

45. Brunoro S. Passive envelope measures for improving energy efficiency in the energy retrofit of buildings in Italy. *Buildings*. 2024; 14(7):2128. DOI: 10.3390/buildings14072128. EDN HYUTEW.

46. Zhang Y., Omer S., Hu R. Impact of window size modification on energy consumption in UK residential buildings: a feasibility and simulation study. *Sustain-*

*ability*. 2025; 17(7):3258. DOI: 10.3390/su17073258. EDN LWWCUX.

47. Kolesnikova A.V. *Heat transfer in non-uniform monolithic external walls of buildings with façade insulation : dissertation of candidate of technical sciences*. Tomsk, 2006; 199. (rus.).

48. Puldás L.A. *Non-stationary thermal conditions in civil buildings : dissertation of candidate of technical sciences*. Tyumen, 2008; 146. EDN NQCVBB. (rus.).

49. Miroshnichenko T.A. *Non-stationary heat and moisture transfer in multilayer external enclosures with inclusions : dissertation of candidate of technical sciences*. Tomsk, 2006; 224. EDN NOJHDD. (rus.).

50. Kotlyarova N.S. *Modeling of temperature fields in enclosing structures in the area of installation of a heating device : dissertation of candidate of technical sciences*. Rostov-on-Don, 1998; 143. (rus.).

Received January 28, 2026.

Adopted in revised form on February 8, 2026.

Approved for publication on February 13, 2026.

**B I O N O T E S :** **Kirill P. Zubarev** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of General and Applied Physics, Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; senior researcher at the Laboratory of Building Thermal Physics; **Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Building Sciences (NIISF RAASN)**; 21 Lokomotivny proezd, Moscow, 127238, Russian Federation; Associate Professor at the Department of Construction Technology and Structural Materials, leading researcher of the Scientific Center of Engineering and Construction Technologies; **RUDN University**; 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198, Russian Federation; zubarevkirill93@mail.ru;

**Mikhail V. Emelianov** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Information Systems, Technologies and Automation in Construction; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Emelianov@mgsu.ru;

**Yulia A. Saprónova** — laboratory research assistant at the A.B. Zolotov Scientific and Educational Center for Computer Modeling of Unique Buildings, Structures, and Complexes; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ho5metown@gmail.com;

**Victor L. Dobshits** — postgraduate student of the Department of Construction Technologies and Structural Materials; **RUDN University**; 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198, Russian Federation; 89153383886@mail.ru;

**Nikita Yu. Zavarzin** — postgraduate student of the Department of Construction Technologies and Structural Materials; **RUDN University**; 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198, Russian Federation; nike.zavar@yandex.ru;

**Vyacheslav V. Kazunin** — postgraduate student of the Department of Construction Technologies and Structural Materials; **RUDN University**; 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198, Russian Federation; kvv-vyacheslav@yandex.ru.

*Contribution of the authors: all authors contributed equally to the publication.*

*The authors declare no conflicts of interest.*