

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.04:531.391.3

DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.9

Формулы для расчета собственной частоты плоской фермы с дополнительными опорами

Михаил Николаевич Кирсанов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Предлагаются схема статически определимой фермы с параллельными поясами и алгоритм вывода аналитической зависимости величины прогиба конструкции под действием равномерно распределенной узловой нагрузки и первой частоты собственных колебаний от числа панелей.

Материалы и методы. Материал стержней фермы упругий, шарниры идеальные, нагрузка узловая. Ферма внешне статически неопределимая. Все расчеты усилий и преобразования в символьной форме выполняются в системе компьютерной математики. Для расчета прогиба применяется формула Максвелла – Мора. Формула для первой частоты выводится на основе варианта приближенного метода Донкерлея в предположении, что масса фермы равномерно распределена по ее узлам. Узлы совершают вертикальные колебания. Для расчета коэффициентов в формулах для прогиба и частоты используется метод индукции по числу панелей. Решение полученных рекуррентных уравнений осуществляется в системе компьютерной математики Maple.

Результаты. Коэффициенты формулы для расчета прогиба и частоты колебаний имеют вид полиномов по числу панелей степени не выше четвертой. Обнаружено, что при определенном числе панелей ферма допускает кинематическую изменяемость. Представлен пример кинематически непротиворечивой картины распределения виртуальных скоростей узлов фермы. Метод, примененный для оценки частоты колебаний, показал хорошую точность в сравнении с численным, учитывающим все степени свободы принятой модели фермы. Расчет проведен для кинематически допустимых чисел панелей конструкции. Приведен общий член последовательности таких чисел.

Выводы. Исползованные для оценки деформаций и собственной частоты методы и алгоритм показали свою эффективность и могут быть применены для аналогичных расчетов регулярных конструкций. Найденные случаи кинематической изменяемости указывают на необходимость кинематической проверки используемых на практике стержневых конструкций.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ферма, прогиб, собственная частота колебаний, кинематическая изменяемость, аналитическое решение, асимптотика, Maple, сдвиг опоры, метод Донкерлея

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Кирсанов М.Н. Формулы для расчета собственной частоты плоской фермы с дополнительными опорами // Строительство: наука и образование. 2026. Т. 16. Вып. 1. Ст. 9. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.9

Автор, ответственный за переписку: Михаил Николаевич Кирсанов, c216@ya.ru.

Formulas for calculating the natural frequency of a flat truss with additional supports

Mikhail N. Kirsanov

National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI); Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. A diagram of a statically determinate truss with parallel chords and an algorithm for deriving an analytical dependence of the magnitude of the structure deflection under the action of a uniformly distributed nodal load and the first frequency of natural oscillations on the number of panels are proposed.

Materials and methods. The material of the truss rods is elastic, the hinges are ideal, the load is nodal. The truss is externally statically indeterminate. All calculations of forces in symbolic form and transformations are performed in the computer mathematics system. The Maxwell – Mohr formula is used to calculate the deflection. The formula for the first frequency is derived based on a version of the approximate Dunkerley method under the assumption that the truss mass is uniformly distributed over its nodes. The nodes perform vertical oscillations. To calculate the coefficients in the formulas for the dependence of deflection and frequency, the induction method is used with respect to the number of panels. The solution of the obtained recurrent equations is performed in the Maple computer mathematics system.

Results. The coefficients of the formula for calculating the deflection have the form of polynomials with respect to the number of panels of a degree not higher than fourth. It was found that for a certain number of panels the truss allows kinematic

variability. An example of a kinematically consistent distribution of virtual velocities of truss nodes is given. The method used to estimate the oscillation frequency showed good accuracy in comparison with the numerical method, which takes into account all degrees of freedom of the adopted truss model. The calculation was performed for kinematically admissible numbers of panels. The general term of the sequence of such numbers is given.

Conclusions. The methods and algorithm used to estimate deformations and natural frequency have proven their efficiency and can be applied to similar calculations of regular structures. The found cases of kinematic variability indicate the need for kinematic verification of the rod structures used in practice.

KEYWORDS: truss, deflection, natural frequency of oscillations, kinematic variability, analytical solution, asymptotics, Maple, support shear, Dunkerley method

FOR CITATION: Kirsanov M.N. Formulas for calculating the natural frequency of a flat truss with additional supports. *Construction: Science and Education*. 2026; 16(1):9. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.9

Corresponding author: Mikhail N. Kirsanov, c216@ya.ru.

ВВЕДЕНИЕ

В практических расчетах строительных конструкций, как правило, используют численные методы, позволяющие учесть все особенности рассчитываемых систем и действующих нагрузок. Чаще всего для этого применяют какие-либо программные комплексы, основанные на методе конечных элементов [1–3]. Альтернативой численным методам являются аналитические методы, использующие системы компьютерной математики. Наиболее распространены такие системы, как Wolfram Mathematica и Waterloo Maple, имеющие сходные системы команд и возможности. Проблемы аналитических исследований регулярных (содержащих периодические структуры) стержневых систем изучались в работах [4, 5]. Расчетами элементов строительных конструкций в символьной форме занимались А.В. Матросов и Д.П. Голоскоков [6, 7]. Аналитический расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple выполнили Е.В. Комерзан, И.Г. Ниналалов и О.В. Свириденко [8]. Примененный этими авторами алгоритм позволил рассчитать прогиб плоской внешне статически неопределимой фермы и вывести конечную формулу для прогиба в зависимости от числа панелей [9]. В исследованиях [10, 11] они получили приближенное решение для консольной фермы и пространственной стержневой конструкции соответственно.

Формулы для расчета статического прогиба и частоты собственных колебаний узлов плоской фермы с произвольным числом панелей выведены методом индукции [12]. Выполнен расчет значения первой (основной) частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы с использованием приближенного метода Донкерлея [13]. Проанализирована об-

ласть резонансно безопасных частот плоской модели регулярной фермы в предположении, что массы в узлах совершают только вертикальные колебания [14, 15]. Приближенная формула для собственной частоты двухпролетной фермы получена в системе Maple [16]. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей выведена методом индукции [17]. Спектр собственных частот плоской регулярной фермы с двойной решеткой рассмотрен в публикации [18], пространственной — в работе [19]. Выведена аналитическая оценка первой частоты собственных колебаний опоры в виде Г-образной пространственной фермы [20].

Цель настоящего исследования — получить аналитическую зависимость от числа панелей и размеров конструкции прогиба и собственной частоты колебаний новой схемы раскосной фермы, допускающей при определенном числе панелей кинематическую изменяемость.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Статически определимая ферма с восходящими раскосами решетки, стойками и параллельными поясами имеет по концам по две опоры. Три опоры — подвижные шарниры, одна опора — неподвижный шарнир. В ферме $2n$ панелей длиной a в средней части пролета (считая по верхнему поясу) и еще по три панели по концам. Высота фермы равна h . Масса модели фермы равномерно распределена по ее узлам равными массами m , стержни при таком подходе считаются невесомыми. Рассматриваются вертикальные колебания узлов по гармоническому закону (рис. 1), горизонтальными колебаниями узлов пренебрегают.

В решении задачи о частоте свободных колебаний фермы число степеней свободы равно числу ее

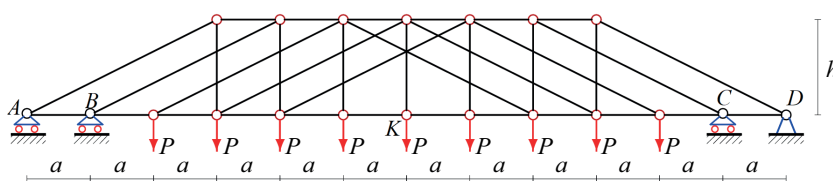


Рис. 1. Схема фермы, $n = 3$

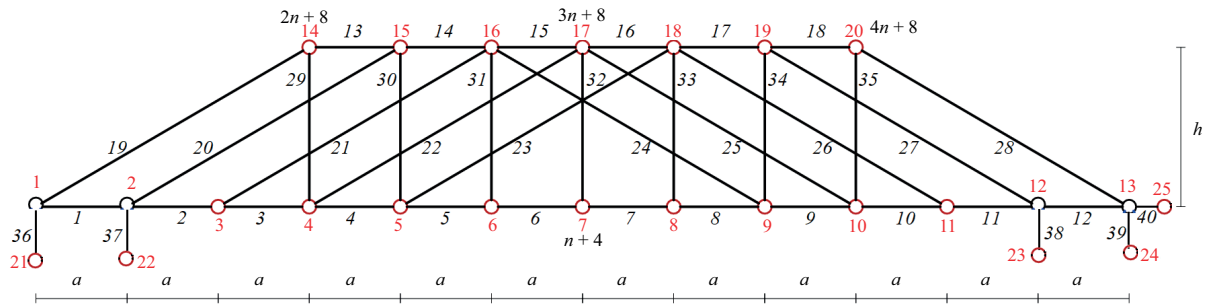


Рис. 2. Номера узлов и стержней фермы, $n = 3$

внутренних узлов: $K = 4n + 8$. Общее число стержней $v = 8n + 16$. В это число стержней входят также пять стержней, моделирующих опоры. Жесткость опор соответствует жесткости стержней длиной h .

Расчет усилий в стержнях. Усилия в стержнях, необходимые для определения жесткости статически определимой системы по формуле Максвелла – Мора, находятся из условия равновесия узлов. В системе символьной математики составляется система уравнений равновесия узлов, матрица которой состоит из направляющих косинусов усилий. Эти величины вычисляются в символьной форме по данным о порядке соединения стержней в узлах и координатам узлов. Узлы и стержни фермы нумеруются (рис. 2). Начало координат находится в левой подвижной опоре A :

$$x_i = a(i - 1); y_i = 0; i = 1, \dots, 2n + 7;$$

$$x_{i+2n+7} = a(i + 2); y_{i+2n+7} = h; i = 1, \dots, 2n + 1.$$

Структура соединения стержней и узлов задается списками, содержащими номера узлов по концам стержней. Стержни нижнего пояса, например, кодируются следующими списками: $\Phi_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n + 6$. Аналогично для стержней верхнего пояса создаются списки: $\Phi_{i+2n+6} = [i + 2n + 7, i + 2n + 8], i = 1, \dots, 2n$.

Пролет фермы $AD = L = 2(n + 3)a$. Усилия находятся из решения системы уравнений равновесия узлов, записанной для произвольного порядка фермы в матричной форме: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{G} — матрица направляющих косинусов размером $v \times v$; \mathbf{S} — вектор неизвестных усилий и опорных реакций; \mathbf{R} — вектор внешних узловых нагрузок. Направляющие

косинусы рассчитываются по данным о координатах узлов и порядку соединения стержней в соответствующих узлах.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Усилия в стержнях. При действии нагрузки интенсивностью P , распределенной по узлам 3, ..., 11 нижнего пояса, ненулевые элементы вектора в правой части системы уравнений равновесия имеют вид: $R_i = P, i = 3, \dots, 2n + 5$ (рис. 3). Распределение усилий в стержнях от действия единичной безразмерной нагрузки $P = 1$, распределенной по нижнему поясу при $a = 3$ м, $h = 2$ м, показано на рис. 3.

Красным цветом выделены растянутые стержни, синим — сжатые. Значения усилий в стержнях округлены до двух знаков. Верхний пояс фермы при такой нагрузке сжат, но сжат неравномерно. Центральные стержни оказываются не самыми нагруженными, как в простых балочных фермах. Это является следствием особенности конструкции: раскосы охватывают три соседние панели, передавая усилия на стержни этих панелей. Нижний пояс и раскосы в решетке сжаты, а стойки растянуты незначительными усилиями.

Расчет усилий в стержнях фермы с различным числом панелей показал, что при определенном числе панелей определитель матрицы системы уравнений равновесия обращается в ноль. И этот эффект не зависит от размеров панелей и приложенной нагрузки. Обнаружена последовательность $n = 1, 3, 4, 6, 7, 9, \dots$ допустимых чисел панелей с общим членом:

$$n = (6k + (-1)^k - 1)/4; k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

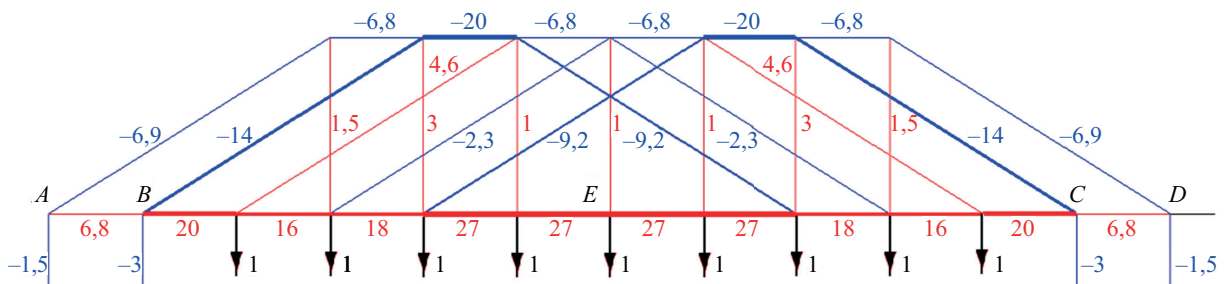


Рис. 3. Нагрузка и распределение усилий, $n = 3$

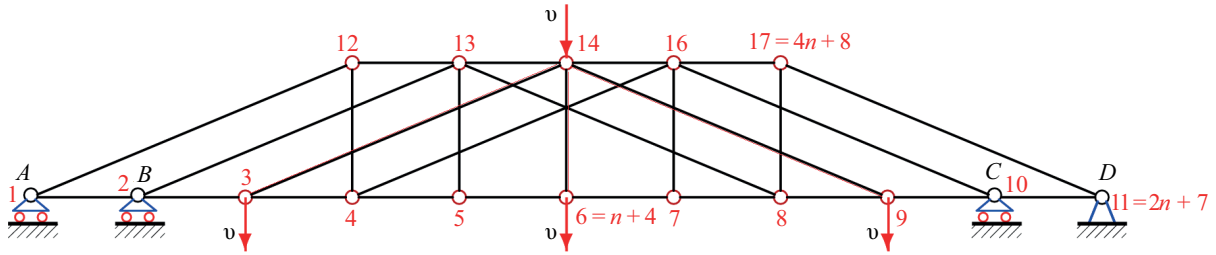


Рис. 4. Возможные скорости узлов изменяемой фермы при $n = 2$

В остальных случаях можно обнаружить кинематически непротиворечивую схему возможных скоростей узлов фермы, делающую ее мгновенно изменяемым механизмом (рис. 4).

При $n = 2$ четыре узла фермы получают недопустимые для жесткой конструкции вертикальные скорости v , остальные узлы и опоры остаются неподвижными. Часть стержней, например 2–3, 3–4, совершают мгновенные вращения, а стержни 3–14, 6–14 и 9–14 движутся поступательно. Таким образом, расчеты прогибов и частот колебаний должны быть выполнены не для всех ферм, а только для тех, число панелей в которых согласуется с выражением (1). Аналогичный эффект кинематического вырождения плоской ферменной конструкции был обнаружен в работах [21, 22].

Отдельно можно вывести формулы для реакций опор. Для этого используется метод индукции. Расчет реакций опор для последовательности ферм различного порядка дает последовательность: $N_A = N_D = [2P, 3P/2, 4P, 5P/2, 6P, 7P/2, \dots]$. Общий член этой последовательности находится средствами Maple из решения линейного однородного рекуррентного уравнения, составленного оператором `rgf_findrecur`:

$$N_A = N_D = P(k + 1)((-1)^k k - 3)/4; k = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично находятся и другие реакции, как функции числа панелей:

$$N_B = N_C = P((3 + (-1)^k)k + 2 + 2(-1)^k)/4; k = 1, 2, 3, \dots$$

Горизонтальная реакция правой неподвижной опоры при такой нагрузке равна нулю.

Прогиб. Прогиб фермы оценивается по вертикальному смещению среднего узла E . Для этого используется формула Максвелла – Мора:

$$\Delta_E = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(p)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF),$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ — усилие в стержне с номером α при действии на ферму указанной распределенной нагрузки; $S_{\alpha}^{(1)}$ — усилие от действия единичной вертикальной силы на узел E ; l_{α} — длина стержня α . Считается, что жесткость на растяжение EF стержней для всей фермы одинаковая. Как и при выводе формул для усилий в зависимости от числа панелей составляется последовательность решений для $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \Delta_{E,1} &= P(99a^3 + c^3 + 3h^3)/(2h^2EF); \\ \Delta_{E,2} &= P(441a^3 + 2c^3 + 4h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_{E,3} &= P(593a^3 + 2c^3 + 4h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_{E,4} &= 3P(1557a^3 + 3c^3 + 5h^3)/(2h^2EF); \\ &\dots \\ \Delta_{E,18} &= 5P(64\,053a^3 + 10c^3 + 12h^3)/(h^2EF). \end{aligned}$$

Для меньшей длины последовательности решений закономерность в системе Maple найти нельзя. Решения линейных однородных рекуррентных уравнений получены с помощью оператора `rsolve` из пакета `genfunc` системы Maple. Коэффициент при a^3 является решением уравнения девятого порядка:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}$$

с начальными условиями $C_{1,1} = 99/2, C_{1,2} = 441, C_{1,3} = 693, \dots, C_{1,9} = 46\,935/2$ и имеет вид:

$$C_1 = (270k^4 + 36(45 + 7(-1)^k)k^3 + 54(71 + 21(-1)^k)k^2 + 36(117 + 67(-1)^k)k + 2115 + 1917(-1)^k)/128.$$

В общем: $\Delta_{E,n} = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(h^2EF)$,

где $c = \sqrt{9a^2 + h^2}$ и

$$C_2 = (2k^2 + (6 + 2(-1)^k)k + 3(-1)^k + 5)/16;$$

$$C_3 = (2k^2 + (2(-1)^k + 14)k + 17 + 7(-1)^k)/16.$$

На рис. 5 представлены кривые зависимости от числа панелей относительного прогиба. $\Delta' = EF\Delta_{E,n}/(LP_{sum})$, где $P_{sum} = P(2n + 3)$ — суммарная нагрузка на ферму. Операторы системы Maple могут также найти асимптотику решения. Выясняется, что рост относительного прогиба при увеличении числа панелей имеет квадратичный характер: $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^2 = 15a^2/(64h^2)$.

Следует отметить, что в пределах принятой модели фермы полученное решение для прогиба является точным, поэтому оно особенно эффективно для ферм со значительным числом панелей.

Частота собственных колебаний. Наиболее востребована на практике для динамических расчетов конструкций первая, наименьшая, частота колебаний [23, 24]. Для получения значения этой величины в зависимости от числа панелей можно воспользоваться методом индукции обобщения ряда приближенных

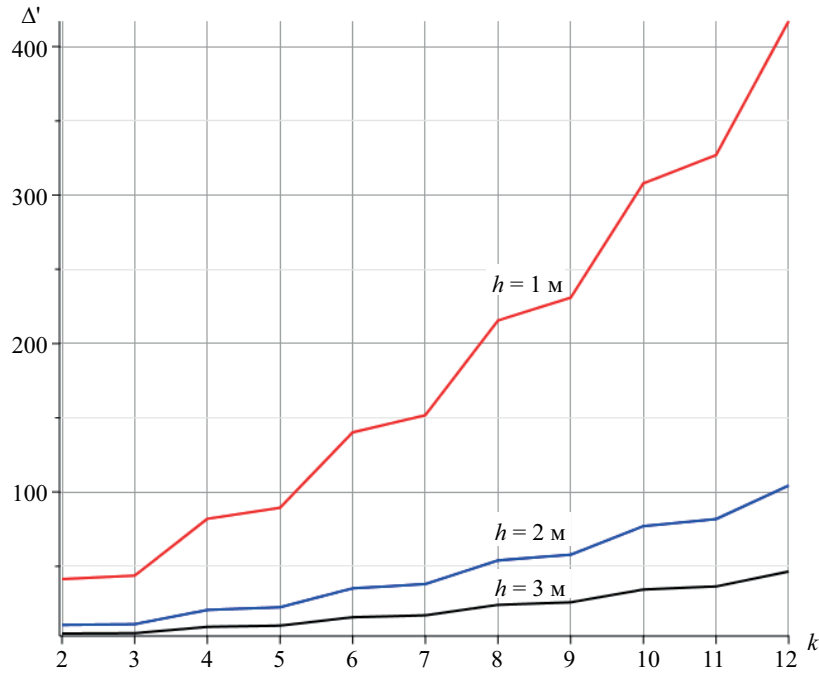


Рис. 5. Зависимость относительного прогиба от числа панелей

аналитических решений на основе модифицированной формулы Донкерля [25]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K/2 = mK\Delta_n, \quad (2)$$

где ω_p — парциальная частота колебаний одной массы m в отдельном узле с номером p . Упрощение исходной формулы Донкерля достигнуто за счет замены суммы парциальных прогибов $\sum_{p=1}^K \delta_p$ ее средним значением $\delta^{\max} K/2$. Частота находится из уравнения движения массы в узле:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0; \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (3)$$

Коэффициент D_p вычисляется с использованием формулы Максвелла – Мора суммированием по всем стержням фермы, включая пять опор, которые приняты деформируемыми:

$$1/D_p = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (4)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ — усилие в стержне с номером α при действии на узел p единичной вертикальной силы. Опорные стержни приняты с условной длиной h . В качестве узла p выбирается наиболее податливый узел [25]. Для рассматриваемой схемы таким узлом является узел с номером $n + 4$ в середине нижнего пояса. Расчет суммы в выражении (4) $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (2EF)$

для ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (27a^3 + c^3 + 3h^3)/(4h^2EF); \\ \Delta_2 &= (81a^3 + c^3 + 2h^3)/(2h^2EF); \\ \Delta_3 &= (81a^3 + c^3 + 2h^3)/(2h^2EF); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (513a^3 + 3c^3 + 5h^3)/(4h^2EF); \\ \Delta_5 &= (513a^3 + 3c^3 + 5h^3)/(4h^2EF), \dots \end{aligned}$$

Общий член полученной последовательности методами Maple находится из анализа не менее четырнадцати ферм различного порядка. С помощью оператора `rgf_findrecur` системы Maple составляется однородное рекуррентное уравнение для каждого коэффициента. Для коэффициента C_1 получается уравнение седьмого порядка:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 3C_{1,k-2} - 3C_{1,k-3} - 3C_{1,k-4} + 3C_{1,k-5} + C_{1,k-6} - C_{1,k-7}$$

Для решения уравнений используется оператор `solve`:

$$C_1 = (18k^3 + 27(3 + (-1)^k)k^2 + 9(19 + 9(-1)^k)k + 135 + 81(-1)^k)/32.$$

Аналогично находятся и другие коэффициенты:

$$C_2 = ((-1)^k + 2k + 3)/16; \quad C_3 = (11 + (-1)^k + 2k)/16. \quad (5)$$

В итоге решение имеет вид:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(h^2EF).$$

Расчетная формула для определения первой частоты колебаний принимает вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(4n+8)(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (6)$$

В отличие от аналитического решения задачи о прогибе $\Delta_{E,n}$ полученное решение для основной частоты колебаний является приближенным. Оценить

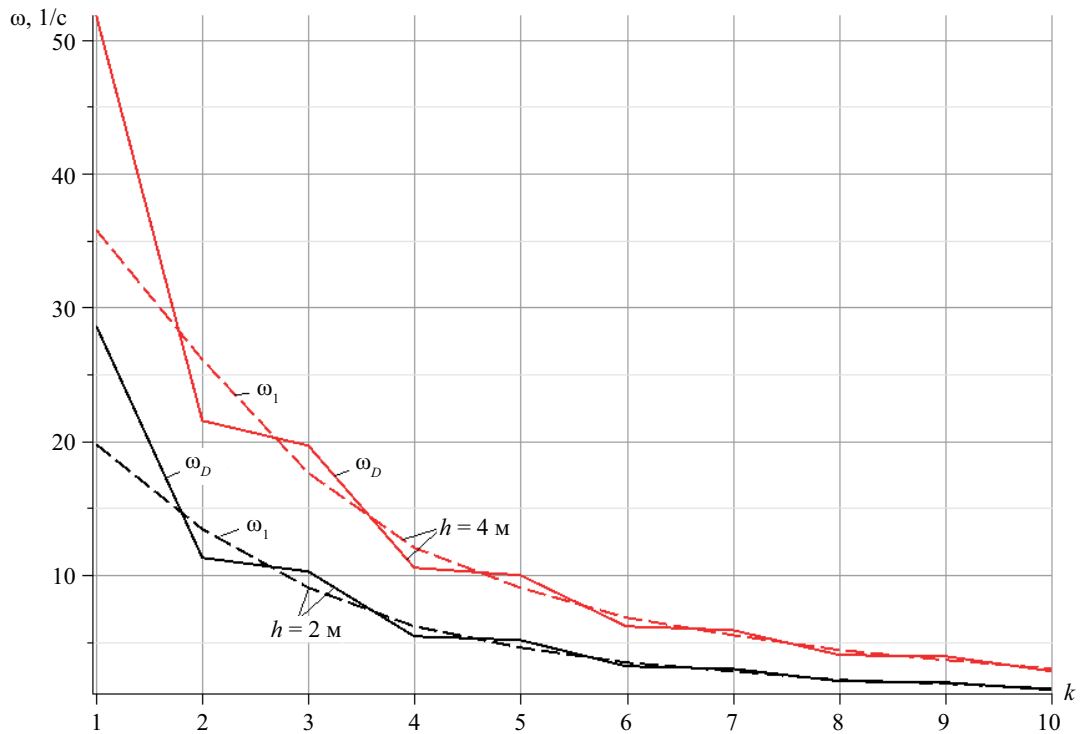


Рис. 6. Сравнение аналитического решения с численным

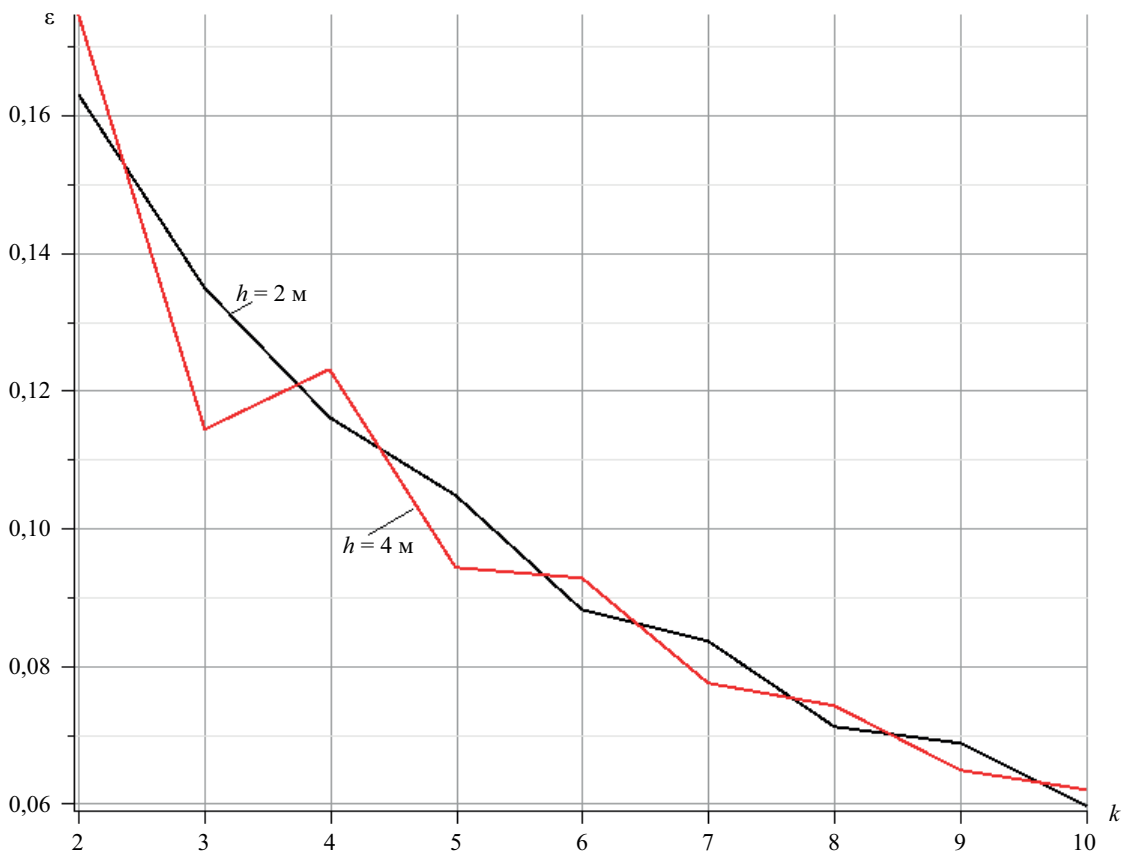


Рис. 7. Погрешность аналитической оценки основной частоты

степень приближения найденного решения можно, сравнив его с численным решением задачи о колебании с учетом всех K степеней свободы системы гру-

зов. Для расчета приняты размеры фермы: $a = 3$ м, $h = 2$ м или $h = 4$ м. Стальные стержни имеют модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 200$ кг,

площадь поперечного сечения стержней $F = 9 \text{ см}^2$. Кривые аналитической зависимости от числа панелей частоты ω_D и первой частоты спектра ω_1 , рассчитанной численно для двух значений высоты фермы h , приведены на рис. 6. При увеличении числа панелей в ферме оба решения, аналитическое и численное, сближаются, частота скачкообразно уменьшается. В пределе частота стремится к нулю. Используемый модифицированный метод Донкерлея не обладает свойством нижней границы точного решения оригинального метода Донкерлея [24]. Кривая аналитического решения (6) несколько раз пересекает кривую численного. Это повышает точность предложенного решения. Точность приближенного аналитического решения получается высокой и увеличивается с ростом числа панелей. Это лучше всего можно оценить по относительной величине: $\varepsilon = |\omega_D - \omega_1|/\omega_1$. На рис. 7 показана зависимость погрешности ε от числа панелей при различных значениях высоты h .

При построении графика использованы те же данные фермы, что и для кривых на рис. 6. Погрешность аналитического решения неравномерно уменьшается с увеличением порядка фермы и не-

многу зависит от высоты фермы h . Погрешность также зависит от четности числа k .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрена и проанализирована новая схема раскосной статически определимой регулярной фермы с двумя дополнительными концевыми опорами, допускающая кинематическую изменяемость при определенном числе панелей. Замеченный дефект рассмотренной схемы достаточно опасный, так как он может быть скрыт в реальной конструкции, например, за счет введения жестких соединений вместо шарнирных узлов. Обнаружение этой особенности регулярных ферм возможно при анализе их кинематики. В системе компьютерной математики с использованием метода индукции выведены приближенные формулы зависимости прогиба и основной (первой) частоты собственных колебаний от числа панелей. Отмечается, что точность приближенной формулы растет с увеличением числа панелей. В решении задачи о прогибе фермы под действием распределенной узловой нагрузки по нижнему поясу найдена квадратичная асимптотика.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method // Computers & Structures. 2024. Vol. 305. P. 107570. DOI: 10.1016/j.compstruc.2024.107570
2. Wang Q., Yang W., Wang L., Bai G., Ma G. Reinforcement design and structural performance for the topology optimized 3D printed concrete truss beams // Engineering Structures. 2025. Vol. 332. P. 120064. DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.120064
3. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М. : Издательство АСВ, 2022. 306 с. EDN CSOLBF.
4. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. Vol. 85. Issue 9. Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
5. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
6. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // Materials Physics and Mechanics. 2018. Vol. 36. Issue 1. Pp. 137–141. DOI: 10.18720/MPM.3612018_15
7. Goloskokov D.P. Analyzing simply supported plates using Maple system // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA). 2014. Pp. 55–56. DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273
8. Комерзан Е.В., Ниналалов И.Г., Свириденко О.В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 4 (39). С. 27–34. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.003. EDN DLVBCD.
9. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. № 2 (29). С. 29–37. EDN LJWUOW.
10. Sviridenko O.V., Komerzan E.V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 3 (101). P. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1. EDN CKQDPU.
11. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. № 4 (35). С. 40–48. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005. EDN NCYGXH.
12. Грибова О.В. Формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2025. № 1 (44). С. 31–39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003. EDN EHTDEW.

13. Манукало А.С. Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 54–60. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.006. EDN UXEELW.
14. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024. No. 4 (113). P. 11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4. EDN FLBVJY.
15. Льюнг Конг Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 2 (41). С. 16–26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002. EDN AKAVDU.
16. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. 2021. No. 5 (20). P. 2001. DOI: 10.57728/ALF.20.1. EDN RISIKU.
17. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 4 (27). С. 16–25. EDN EJKATV.
18. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. № 3 (111). DOI: 10.34910/MCE.111.14. EDN CNTIPO.
19. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002. EDN GMNMJQ.
20. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 35–45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP.
21. Kirsanov M.N. Formulas for the First Two Frequencies of Natural Oscillations of a Regular truss // *AlfaBuild*. 2025. № 2 (34). P. 3401. DOI: 10.57728/ALF.34.1
22. Курсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. Т. 3. М.: ИНФРА-М, 2023. 178 с. DOI: 10.12737/1939108. EDN SSYJKQ.
23. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // *Journal of Sound and Vibration*. 1991. Vol. 150. Issue 1. Pp. 111–118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9
24. Rutenberg A. A lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems // *Journal of Sound and Vibration*. 1976. Vol. 45. Issue 2. Pp. 249–252. DOI: 10.1016/0022-460x(76)90599-x
25. Kirsanov M.N. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 3 (108). P. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1

Поступила в редакцию 16 апреля 2025 г.

Принята в доработанном виде 12 декабря 2025 г.

Одобрена для публикации 12 декабря 2025 г.

ОБ АВТОРЕ: **Михаил Николаевич Кирсанов** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»)**; 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstiniaResearcherID: 2939132; C216@ya.ru.

INTRODUCTION

In practical calculations of building structures, numerical methods are generally employed to account for all the characteristics of the systems under consideration and the applied loads. Most commonly, software packages based on the finite element method are used for this purpose [1–3]. An alternative to numerical methods is analytical methods utilizing computer algebra systems. The most widely used systems are Wolfram Mathematica and Waterloo Maple, which have similar command systems and capabilities. Problems relating to the analytical study of regular (containing periodic structures) bar systems have been investigated in [4, 5]. A.V. Matrosov and D.P. Goloskokov carried out symbolic calculations of structural elements [6, 7]. An analytical calculation of the fundamental natural

frequency of a planar model of a composite truss with an arbitrary number of panels in the Maple system was performed by E.V. Komerzan, I.G. Ninalalov and O.V. Sviridenko [8]. The algorithm applied by these authors made it possible to calculate the deflection of a plane truss that is statically indeterminate in external terms and to derive a final formula for deflection as a function of the number of panels [9]. In studies [10, 11], they obtained an approximate solution for a cantilever truss and a spatial bar structure, respectively.

Formulas for calculating the static deflection and natural frequencies of the nodes in a planar truss with an arbitrary number of panels have been derived using the method of induction [12]. The first (fundamental) natural frequency of a planar truss has been calculated using Dunkerley's approximate method [13]. The range of resonance-safe frequencies of a flat model of a regular

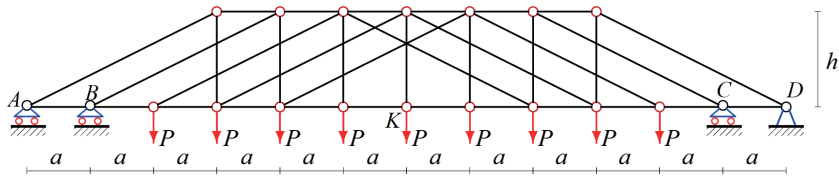


Fig. 1. Diagram of a truss, $n = 3$

truss was analyzed, assuming that the masses at the nodes undergo only vertical vibrations [14, 15]. An approximate formula for the natural frequency of a two-span truss was derived in the Maple system [16]. The dependence of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss on the number of panels was derived by the method of induction [17]. The natural frequency spectrum of a flat regular truss with a double lattice is considered in [18], and that of a spatial truss in [19]. An analytical estimate of the first natural frequency of a support in the form of an L-shaped spatial truss has been derived [20].

The aim of this study is to derive an analytical relationship between the number of panels and the dimensions of the structure, and the deflection and natural frequency of a new diagonal truss design which, for a given number of panels, allows for kinematic variability.

MATERIALS AND METHODS

A statically determinate truss with ascending diagonal members, struts and parallel chords has two supports at each end. Three of the supports are movable joints, and one is a fixed joint. The truss consists of $2n$ panels of length a in the central part of the span (counting from the top chord) and a further three panels at each end. The height of the truss is h . The mass of the truss model is uniformly distributed across its nodes in equal masses m ; the members are considered weightless in this approach. Vertical oscillations of the nodes are considered according to a harmonic law (Fig. 1); horizontal oscillations of the nodes are neglected.

When solving the problem of the natural frequency of a truss, the number of degrees of freedom is equal to the number of its internal nodes: $K = 4n + 8$. The total number of members is $v = 8n + 16$. This number of members also includes five members representing the supports. The stiffness of the supports corresponds to the stiffness of members of length h .

Calculation of forces in members. The forces in the members, required to determine the stiffness of a statically determinate system using Maxwell – Mohr’s formula, are derived from the equilibrium conditions at the joints. In a symbolic mathematics system, a system of equilibrium equations for the joints is formulated, the matrix of which consists of the direction cosines of the forces. These values are calculated symbolically using data on the arrangement of members at the nodes and the coordinates of the nodes. The nodes and members of the truss are numbered (Fig. 2). The origin of the coordinate system is located at the left movable support A :

$$x_i = a(i - 1); y_i = 0; i = 1, \dots, 2n + 7;$$

$$x_{i+2n+7} = a(i + 2); y_{i+2n+7} = h; i = 1, \dots, 2n + 1.$$

The structure of the connection between members and nodes is defined by lists containing the node numbers at the ends of the members. The members of the lower chord, for example, are encoded by the following lists: $\Phi_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n + 6$. Similarly, lists are created for the members of the upper chord: $\Phi_{i+2n+6} = [i + 2n + 7, i + 2n + 8], i = 1, \dots, 2n$.

Truss span $AD = L = 2(n + 3)a$. The forces are determined from the solution to the system of equilibrium equations at the joints, expressed in matrix form for an arbitrary truss configuration: $GS = R$, where G is a matrix of direction cosines $v \times v$; S is a vector of unknown forces and support reactions; R is a vector of external joint loads. The direction cosines are calculated from the node coordinates and the connection order of the members at the corresponding nodes.

RESEARCH RESULTS

Forces in the members. When a load of intensity P is applied, distributed across nodes $3, \dots, 11$ of the lower chord, the non-zero components of the vec-

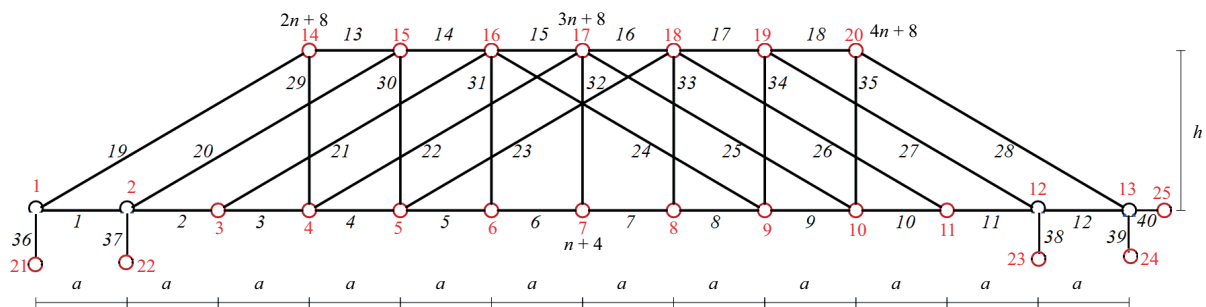


Fig. 2. Node and member numbers of the truss, $n = 3$

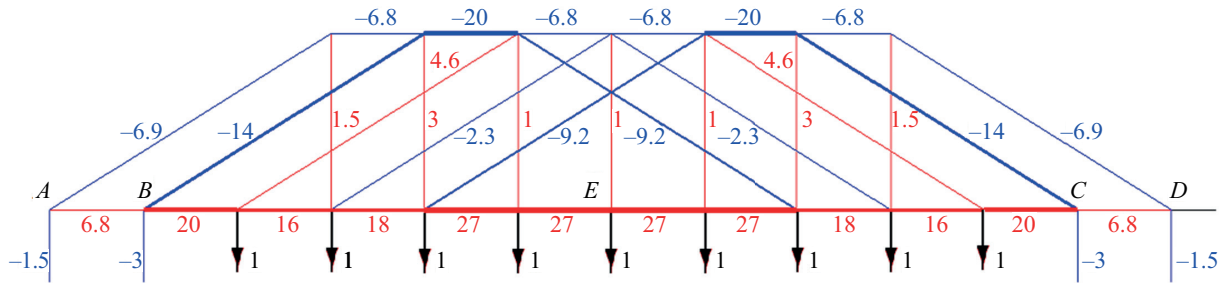


Fig. 3. Load and force distribution, $n = 3$

tor on the right-hand side of the system of equilibrium equations take the form: $R_i = P, i = 3, i = 3, \dots, 2n + 5$ (Fig. 3). The distribution of forces in the members due to a unit dimensionless load $P = 1$, distributed along the lower chord for $a = 3$ m, $h = 2$ m, is shown in Fig. 3.

Tension members are highlighted in red, and compression members in blue. The values of the forces in the members are rounded to two decimal places. Under this load, the upper chord of the truss is under compression, but the compression is uneven. The central members are not the most heavily loaded, as in simple beam trusses. This is a consequence of the design: the braces span three adjacent panels, transferring forces to the members of these panels. The lower chord and the braces in the truss are in compression, whilst the struts are in tension under minor forces.

Calculations of the forces in the truss members with different numbers of panels have shown that, for a certain number of panels, the determinant of the matrix of the equilibrium equations becomes zero. Furthermore, this effect is independent of the dimensions of the panels and the applied load. A sequence of $n = 1, 3, 4, 6, 7, 9, \dots$ admissible numbers of panels has been identified, with the common term:

$$n = (6k + (-1)^k - 1)/4, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

In other cases, it is possible to identify a kinematically consistent configuration of the possible velocities of the truss members, which makes it an instantaneously variable mechanism (Fig. 4).

When $n = 2$, four nodes of the truss experience vertical velocities v that are unacceptable for a rigid structure, whilst the remaining nodes and supports remain stationary. Some members, for example 2–3 and 3–4, undergo instantaneous rotations, whilst members 3–14,

6–14 and 9–14 undergo translational motion. Thus, calculations of deflections and vibration frequencies should be performed not for all trusses, but only for those in which the number of panels satisfies expression (1). A similar effect of kinematic degeneration in a planar truss structure was observed in [21, 22].

The formulas for the support reactions can be derived separately. The method of induction is used for this purpose. Calculating the support reactions for a sequence of trusses of varying order yields the following sequence: $N_A = N_D = [2P, 3P/2, 4P, 5P/2, 6P, 7P/2, \dots]$. The general term of this sequence is found using Maple by solving a linear homogeneous recurrence equation generated by the `rgf_findrecur` operator:

$$N_A = N_D = P(k + 1)((-1)^k k - 3)/4; k = 1, 2, 3, \dots$$

Similarly, other reactions can be found as functions of the number of panels:

$$N_B = N_C = P((3 + (-1)^k)k + 2 + 2(-1)^k)/4, k = 1, 2, 3, \dots$$

The horizontal reaction of the right fixed support under this load is zero.

Deflection. The deflection of the truss is estimated based on the vertical displacement of the middle node E. To do this, the Maxwell – Mohr formula is used:

$$\Delta_E = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(p)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF),$$

where $S_{\alpha}^{(p)}$ — the force in member α under the specified distributed load acting on the truss; $S_{\alpha}^{(1)}$ — the force resulting from a unit vertical force acting on node E; l_{α} — the length of member α . It is assumed that the tensile stiffness EF of the members is the same throughout the truss. As with the derivation of the formulas for

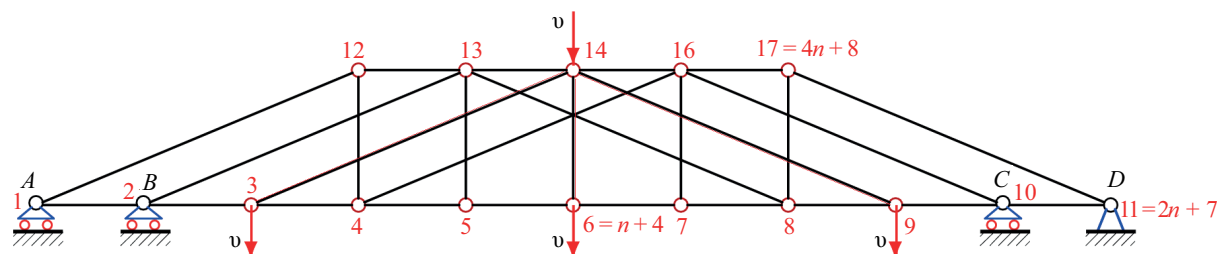


Fig. 4. Possible node velocities in a variable truss when $n = 2$

forces as a function of the number of panels, a sequence of solutions is derived for $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \Delta_{E,1} &= P(99a^3 + c^3 + 3h^3)/(2h^2EF); \\ \Delta_{E,2} &= P(441a^3 + 2c^3 + 4h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_{E,3} &= P(593a^3 + 2c^3 + 4h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_{E,4} &= 3P(1,557a^3 + 3c^3 + 5h^3)/(2h^2EF); \\ &\dots \\ \Delta_{E,18} &= 5P(64,053a^3 + 10c^3 + 12h^3)/(h^2EF). \end{aligned}$$

For shorter sequences of solutions, no pattern can be found in the Maple system. The solutions to the linear homogeneous recurrence equations were obtained using the rsolve operator from the genfunc package in the Maple system. The coefficient at a^3 is a solution to a ninth-order equation:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}$$

with initial conditions $C_{1,1} = 99/2$, $C_{1,2} = 441$, $C_{1,3} = 693$, ..., $C_{1,9} = 46,935/2$ and takes the form:

$$C_1 = (270k^4 + 36(45 + 7(-1)^k)k^3 + 54(71 + 21(-1)^k)k^2 + 36(117 + 67(-1)^k)k + 2,115 + 1,917(-1)^k)/128.$$

All in all: $\Delta_{E,n} = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3)/(h^2EF)$,

where $c = \sqrt{9a^2 + h^2}$ and

$$C_2 = (2k^2 + (6 + 2(-1)^k)k + 3(-1)^k + 5)/16;$$

$$C_3 = (2k^2 + (2(-1)^k + 14)k + 17 + 7(-1)^k)/16.$$

Fig. 5 shows the curves depicting the relationship between the number of panels and the relative deflection $\Delta' = EF\Delta_{E,n}/(LP_{sum})$, where $P_{sum} = P(2n + 3)$ is the total load on the truss. Maple operators can also determine

the asymptotic behaviour of the solution. It turns out that the increase in relative deflection as the number of panels increases follows a quadratic pattern: $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^2 = 15a^2/(64h^2)$,

It should be noted that, within the scope of the adopted truss model, the solution obtained for deflection is accurate; therefore, it is particularly effective for trusses with a large number of panels.

Natural frequency. In practice, the first (lowest) natural frequency is most commonly used for dynamic structural analyses [23, 24]. To obtain the value of this quantity as a function of the number of panels, one may use the method of induction by generalizing a series of approximate analytical solutions based on the modified Donkerley formula [25]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m\delta^{\max}K/2 = mK\Delta_n, \quad (2)$$

where ω_p is the partial vibration frequency of a single mass m at a specific node numbered p . The simplification of the original Donkerley formula is achieved by replacing the sum of the partial deflections $\sum_{p=1}^K \delta_p$ with their average value $\delta^{\max}K/2$. The frequency is determined from the equation of motion for the mass at the node:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0; p = 1, 2, \dots, K. \quad (3)$$

The coefficient D_p is calculated using the Maxwell – Mohr formula by summing over all members of the truss, including the five supports, which are assumed to be deformable:

$$1/D_p = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (4)$$

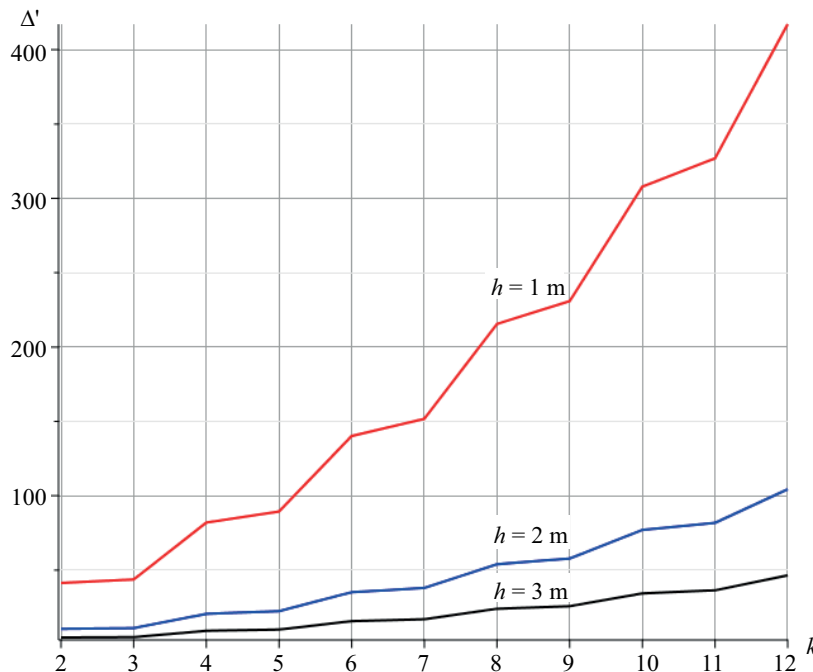


Fig. 5. Relative deflection as a function of the number of panels

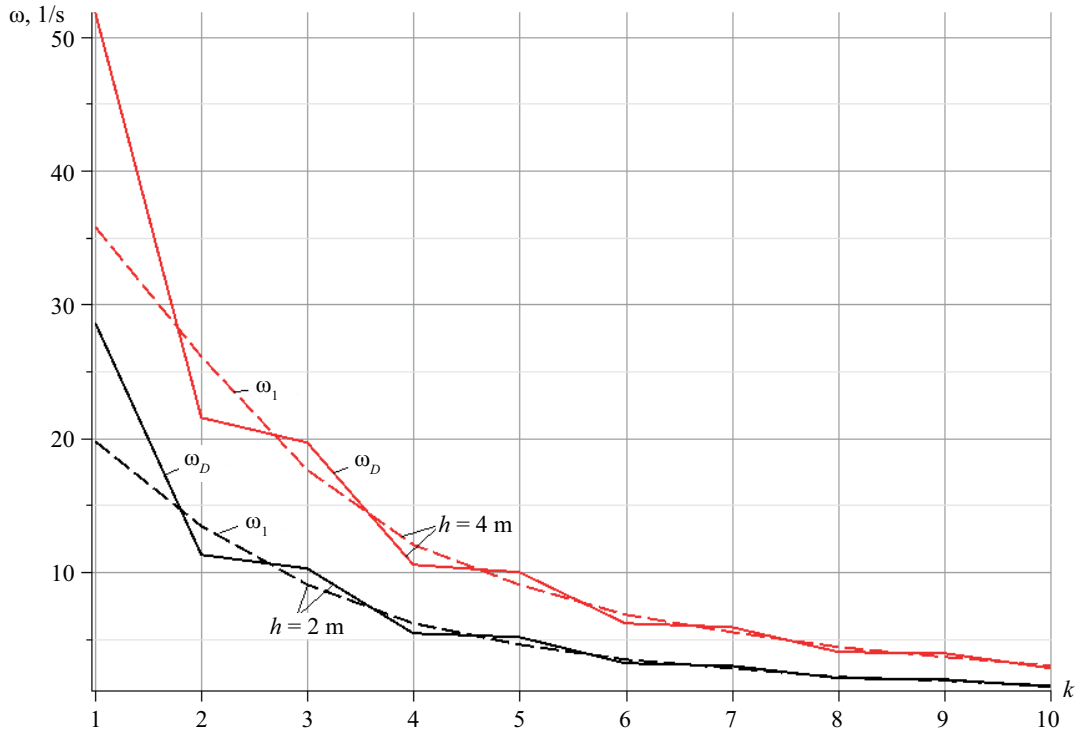


Fig. 6. Comparison of the analytical solution with the numerical solution

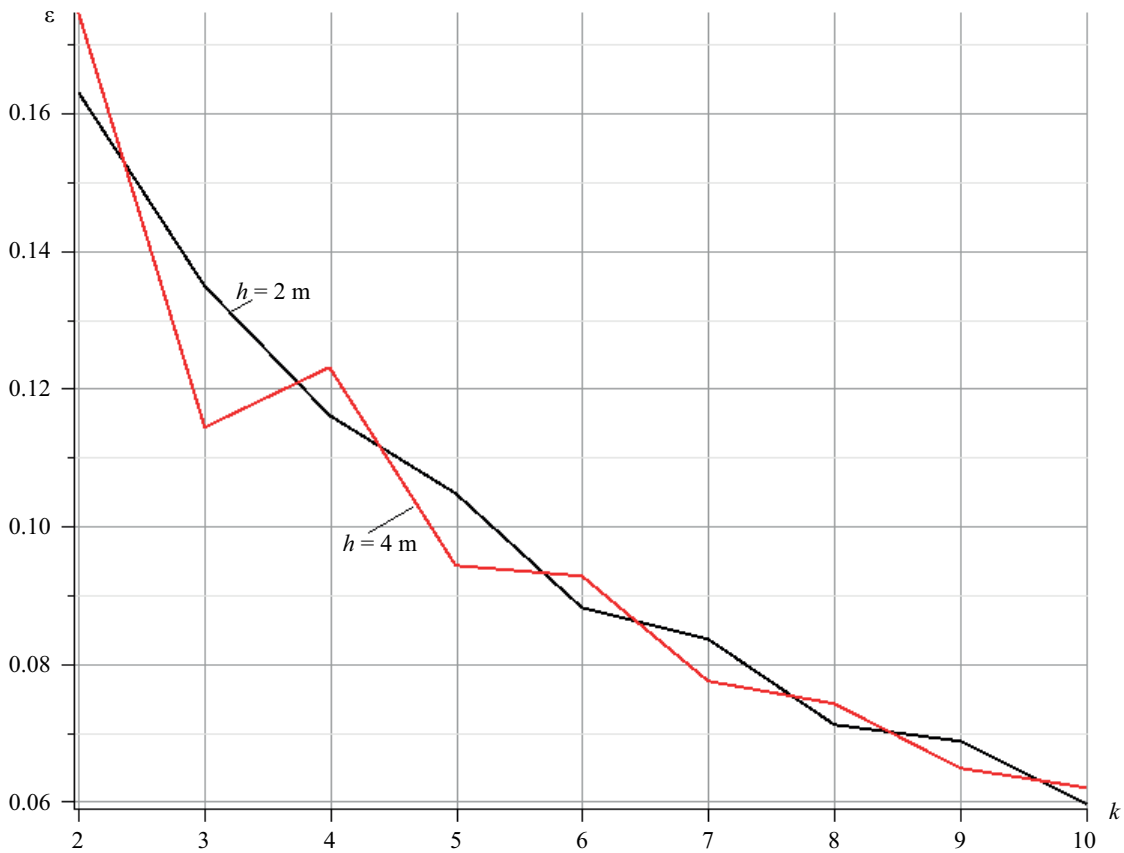


Fig. 7. Error in the analytical estimation of the fundamental frequency

where $S_a^{(p)}$ is the force in the member numbered a when a unit vertical force acts on node p . The support members are assumed to have a nominal length h . Node p is

chosen as the most flexible node [25]. For the scheme under consideration, this node is node number $n + 4$ in the middle of the lower chord. Calculating the sum

in expression (4) $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^n (S_{\alpha}^{(p)})^2 I_{\alpha} / (2EF)$ for a series of trusses with a sequentially increasing number of panels yields the following formulas:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (27a^3 + c^3 + 3h^3)/(4h^2EF); \\ \Delta_2 &= (81a^3 + c^3 + 2h^3)/(2h^2EF); \\ \Delta_3 &= (81a^3 + c^3 + 2h^3)/(2h^2EF); \\ \Delta_4 &= (513a^3 + 3c^3 + 5h^3)/(4h^2EF); \\ \Delta_5 &= (513a^3 + 3c^3 + 5h^3)/(4h^2EF), \dots\end{aligned}$$

The general term of the sequence obtained using Maple methods is derived from the analysis of at least fourteen trinomial expansions of various orders. Using the `rgf_findrecur` operator in Maple, a homogeneous recurrence equation is formulated for each coefficient. For the coefficient C_1 , a seventh-order equation is obtained:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 3C_{1,k-2} - 3C_{1,k-3} - 3C_{1,k-4} + 3C_{1,k-5} + C_{1,k-6} - C_{1,k-7}$$

The `rsolve` operator is used to solve equations:

$$C_1 = (18k^3 + 27(3 + (-1)^k)k^2 + 9(19 + 9(-1)^k)k + 135 + 81(-1)^k)/32.$$

Other coefficients are calculated in the same way:

$$C_2 = ((-1)^k + 2k + 3)/16; C_3 = (11 + (-1)^k + 2k)/16. \quad (5)$$

The result is as follows:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(h^2 EF).$$

The formula for calculating the natural frequency is as follows:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(4n+8)(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (6)$$

Unlike the analytical solution to the deflection problem $\Delta_{E,n}$, the solution obtained for the natural frequency is approximate. The accuracy of the solution can be assessed by comparing it with the numerical solution to the vibration problem, taking into account all K degrees of freedom of the load system. The following truss dimensions are used for the calculation: $a = 3$ m, $h = 2$ m or $h = 4$ m. The steel members have a modulus of elasticity of $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, masses at the nodes of $m = 200$ kg,

and a cross-sectional area of the members of $F = 9$ sm². The analytical curves showing the dependence of the frequency ω_D and the first spectral frequency ω_1 on the number of panels, calculated numerically for two values of the truss height h , are shown in Fig. 6. As the number of panels in the truss increases, both the analytical and numerical solutions converge, and the frequency decreases abruptly. In the limit, the frequency tends to zero. The modified Donkerley method used here does not possess the lower bound property of the exact solution of the original Donkerley method [24]. The curve of the analytical solution (6) intersects the curve of the numerical solution several times. This improves the accuracy of the proposed solution. The accuracy of the approximate analytical solution is high and increases with the number of panels. This can best be assessed by the relative value: $\varepsilon = |\omega_D - \omega_1|/\omega_1$. Fig. 7 shows the dependence of the error ε on the number of panels for various values of height h .

The same truss data used for the curves in Fig. 6 were used to construct this graph. The error in the analytical solution decreases unevenly as the truss order increases and depends slightly on the truss height h . The error also depends on whether the number k is even.

CONCLUSION AND DISCUSSION

A new design for a statically determinate regular truss with two additional end supports was examined and analyzed; this design allows for kinematic variability when a specific number of panels is used. The defect observed in the scheme under consideration is quite dangerous, as it may be concealed in a real structure, for example, by introducing rigid connections instead of hinged joints. Detection of this feature of regular trusses is possible through an analysis of their kinematics. Using the method of induction within a computer algebra system, approximate formulas were derived for the dependence of deflection and the fundamental (first) natural frequency on the number of panels. It is noted that the accuracy of the approximate formula increases with an increase in the number of panels. In solving the problem of truss deflection under a distributed nodal load along the lower chord, a quadratic asymptotic behaviour was found.

REFERENCES

1. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method. *Computers & Structures*. 2024; 305:107570. DOI: 10.1016/j.compstruc.2024.107570
2. Wang Q., Yang W., Wang L., Bai G., Ma G. Reinforcement design and structural performance for the topology optimized 3D printed concrete truss beams. *Engineering Structures*. 2025; 332:120064. DOI: 10.1016/j.engstruct.2025.120064
3. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. *Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms)*. Moscow, ASV Publishing House, 2022; 306. EDN CSOLBF. (rus.).
4. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005; 85(9):607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
5. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechan-*

ics and Physics of Solids. 2006; 54(4):756-782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008

6. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*. 2018; 36(1):137-141. DOI: 10.18720/MPM.3612018_15

7. Goloskokov D.P. Analyzing simply supported plates using Maple system. *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA)*. 2014; 55-56. DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273

8. Komerzan E.V., Ninalalov I.G., Sviridenko O.V. Calculation of a planar model composite truss fundamental frequency. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 4(39):27-34. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.003. EDN DLVBCD. (rus.).

9. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2021; 2(29):29-37. EDN LJWUOW. (rus.).

10. Sviridenko O.V., Komerzan E.V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022; 3(101):10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1. EDN CKQDPU.

11. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. *Structural Mechanics and Structures*. 2022; 4(35):40-48. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005. EDN NCGYXE. (rus.).

12. Gribova O.V. Formulas for calculation of deflection and natural frequency of a flat truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2025; 1(44):31-39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003. EDN EHTDEW. (rus.).

13. Manukalo A.S. Analysis of a planar sprengel truss first frequency natural oscillations value. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):54-60. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.006. EDN UXEELW. (rus.).

14. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024; 4(113):11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4. EDN FLBVJY.

15. Luong Cong L. Dependence of the region of resonance-safe frequencies on the sizes of statically determinable flat truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2024; 2(41):16-26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002. EDN AKAVDU. (rus.).

16. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021; 5(20):2001. DOI: 10.57728/ALF.20.1. EDN RISIKU.

17. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a planar external statically undeterminable truss on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 4(27):16-25. EDN EJKATV. (rus.).

18. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022; 3(111). DOI: 10.34910/MCE.111.14. EDN CNTIPO.

19. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):17-26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002. EDN GMNMJQ. (rus.).

20. Komerzan E.V., Maslov A.N. Estimation of the I-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):35-45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP. (rus.).

21. Kirsanov M.N. Formulas for the First Two Frequencies of Natural Oscillations of a Regular truss. *AlfaBuild*. 2025; 2(34):3401. DOI: 10.57728/ALF.34.1

22. Kirsanov M. Flat farms. *Schemes and calculation formulas : a reference book. Vol. 3*. Moscow, INFRA-M, 2023; 178. DOI: 10.12737/1939108. EDN SSYJKQ. (rus.).

23. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1991; 150(1):111-118. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90405-9

24. Rutenberg A. A lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1976; 45(2):249-252. DOI: 10.1016/0022-460X(76)90599-X

25. Kirsanov M.N. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023; 3(108):10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1

Received April 16, 2025.

Adopted in revised form on December 12, 2025.

Approved for publication on December 12, 2025.

BIONOTES: **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IстинаResearcherID: 2939132; C216@ya.ru.