

Моделирование распространения гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных линейно-упругих стержнях

Сергей Гургенович Саиян^{1,2}

¹ *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия;*

² *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН); г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Введение. Изучаются закономерности распространения гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных линейно-упругих стержнях. Актуальность обусловлена задачей управляемого переноса и локализации механической энергии в инженерных системах. Цель исследования — разработать общее аналитическое решение волнового поля для полубесконечных дискретно-неоднородных стержней, состоящих из произвольного количества слоев, а также показать, что выбор последовательности слоев, их толщин и контрастов механических параметров (модуля упругости, плотности и акустического импеданса) позволяет управлять амплитудно-частотными характеристиками и создавать зоны усиления и ослабления колебаний в заданных диапазонах частот.

Материалы и методы. Предложено общее аналитическое решение для стержней, составленных из конечного числа слоев с кусочно-постоянными параметрами. В каждом слое поле представляется суперпозицией встречных бегущих волн, а на границах раздела сред выполняются условия непрерывности перемещений и нормальных напряжений. Это приводит к матричному описанию (метод передаточных (импедансных) матриц), позволяющему: вычислять комплексные амплитуды в слоях, получать коэффициенты отражения/прохождения для заданной частоты возбуждения ω и строить амплитудно-частотные характеристики в произвольной точке стержня. Приведена методика численного конечно-элементного моделирования дискретно-неоднородных стержневых моделей в программном комплексе ANSYS Mechanical APDL.

Результаты. Показано, что дискретная неоднородность материала позволяет целенаправленно формировать амплитудно-частотные характеристики и управлять волновыми процессами, создавая зоны усиления или ослабления колебаний. На примере трехслойного стержня приведены зависимости амплитуд колебаний от параметров материала (разных скоростей распространения волн в среде) и частоты внешнего воздействия. Выполнена численная верификация с аналитическим решением, подтвердившая корректность методики моделирования.

Выводы. Полученные результаты открывают перспективы практического применения при решении инженерных задач, включая проектирование сейсмических барьеров, волноводов и фильтров с заданными динамическими свойствами, повышающих устойчивость конструкций к вибрационным и сейсмическим воздействиям.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дискретно-неоднородный стержень, гармонические продольные волны, волновая динамика, аналитическое решение, численное моделирование, ANSYS Mechanical APDL, амплитудно-частотные характеристики
Благодарности. Работа выполнена за счет гранта РФФ № 24-49-02002.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Саиян С.Г. Моделирование распространения гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных линейно-упругих стержнях // Строительство: наука и образование. 2026. Т. 16. Вып. 1. Ст. 10. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.10

Автор, ответственный за переписку: Сергей Гургенович Саиян, berformert@gmail.com.

Modelling the propagation of harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous linearly elastic rods

Sergey G. Saiyan^{1,2}

¹ *Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU); Moscow, Russian Federation;*

² *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS); Moscow, Russian Federation*

ABSTRACT

Introduction. The regularities of the propagation of harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous linearly elastic rods are investigated. The relevance of the study is due to the problem of controlled transfer and localization of mechanical energy in engineering systems. The aim of the work is to develop a general analytical solution for the wave field in semi-infinite discretely inhomogeneous rods consisting of an arbitrary number of layers, as well as to show that the choice of the se-

quence of layers, their thicknesses, and the contrasts of mechanical parameters (Young's modulus, density, and acoustic impedance) makes it possible to control the amplitude-frequency characteristics and to create zones of amplification and attenuation of vibrations in prescribed frequency ranges.

Materials and methods. A general analytical solution is proposed for rods composed of a finite number of layers with piecewise constant parameters. In each layer, the field is represented as a superposition of counter-propagating traveling waves, and at the interfaces the continuity conditions for displacements and normal stresses are satisfied. This leads to a matrix description (the transfer, or impedance, matrix method), which makes it possible to compute complex amplitudes in the layers, obtain reflection/transmission coefficients for a given excitation frequency ω , and construct amplitude-frequency characteristics at an arbitrary point of the rod. A procedure is presented for numerical finite element modelling of discretely inhomogeneous rod models in the ANSYS Mechanical APDL software package.

Results. It is shown that discrete material inhomogeneity makes it possible to purposefully shape the amplitude–frequency characteristics and control wave processes by creating zones of amplification or attenuation of vibrations. Using a three-layer rod as an example, the dependences of vibration amplitudes on material parameters (different wave propagation velocities in the medium) and on the frequency of external excitation are presented. Numerical verification against the analytical solution has been carried out, confirming the correctness of the modelling procedure.

Conclusions. The obtained results open up prospects for practical applications in solving engineering problems, including the design of seismic barriers, waveguides, and filters with prescribed dynamic properties that increase the resistance of structures to vibrational and seismic action.

KEYWORDS: discretely inhomogeneous rod, harmonic longitudinal waves, wave dynamics, analytical solution, numerical modelling, ANSYS Mechanical APDL, amplitude-frequency characteristics

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Science Foundation, Grant No. 24-49-02002.

FOR CITATION: Saiyan S.G. Modelling the propagation of harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous linearly elastic rods. *Construction: Science and Education*. 2026; 16(1):10. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.1.10

Corresponding author: Sergey G. Saiyan, berformert@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

Описание проблемы. Распространение гармонических продольных волн в механически неоднородных стержнях, обладающих дискретно-неоднородной структурой, представляет собой важную фундаментальную и прикладную проблему для ряда инженерных областей. В условиях непрерывного усложнения конструкционных материалов и появления новых композиционных структур появилась необходимость в более точном и детализированном описании волновых процессов, возникающих при различных внешних воздействиях.

Подход, связанный с неоднородными материалами, позволяет формировать волновые свойства системы, создавая волноводы [1] или фильтры с заданными резонансными характеристиками, целенаправленно управляющие процессами переноса механической энергии.

Особый интерес вызывают линейно-упругие среды с дискретно-неоднородными включениями [2–8] или периодической (функционально-градиентной) структурой [9–14], поскольку волновые процессы в таких системах существенно отличаются от их аналогов в однородных сплошных средах. В частности, наличие неоднородностей приводит к рассеянию волн, изменению скоростей их распространения, а также формированию сложных полей напряжений и деформаций. Понимание этих процессов дает возможность оптимизировать конструкцию инженерных систем, прогнозировать динамическое поведение материалов и разрабатывать новые волноводные структуры с заданными свойствами.

Применение дискретно-неоднородных материалов. Одной из сфер применения дискретно-неоднородных материалов в строительстве являются сейсмические барьеры [15–19]. Сейсмические

барьеры — это структуры или материалы, специально спроектированные для подавления или отклонения распространения сейсмических волн в грунте и строительных конструкциях. Основной принцип их работы заключается в создании препятствий для механической энергии, тем самым предотвращая передачу колебаний в защищаемый объект. Одно из возможных решений для создания сейсмических барьеров — использование дискретно-неоднородных сред. Дискретная неоднородность означает, что рассматриваемая структура состоит из множества участков, каждый из которых обладает уникальными физико-механическими свойствами. Такие структуры позволяют существенно изменять характеристики распространения волн, обеспечивая эффективное ослабление динамических воздействий на сооружение.

Цели и задачи исследования. В рамках настоящего исследования разработано общее аналитическое решение волнового поля для полубесконечных дискретно-неоднородных стержней, состоящих из произвольного количества слоев материала (рис. 1). Особое внимание уделяется изучению поведения дискретно-неоднородных стержней при приложении гармонических продольных волн различной частоты, а также анализу дискретных неоднородностей, имеющих различные скорости распространения продольных волн. Также проводится численное моделирование в программном комплексе (ПК) ANSYS Mechanical APDL с целью верификации полученных аналитических результатов и последующего решения задач волновой динамики неоднородных сред.

Таким образом, настоящая работа направлена на исследование фундаментальных процессов распространения волн в полубесконечных дискретно-неоднородных линейно-упругих средах. Полученные результаты возможно использовать при разработке

методов проектирования сейсмических барьеров с заданными характеристиками, и они могут быть полезны проектировщикам и инженерам, занимающимся разработкой и реализацией мер по защите инфраструктуры от сейсмических и прочих воздействий, а также исследователям, интересующимся волновыми процессами в неоднородных структурах.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Постановка задачи. Рассматривается полубесконечный дискретно-неоднородный линейно-упругий стержень с гармонической силовой нагрузкой, приложенной к левому концу, и условием Зоммерфельда на правом конце (для уходящих на бесконечность волн), показанный на рис. 1. Данная задача представляет интерес из-за эффекта преломленных и отраженных волн на границах раздела сред с разными скоростями распространения волн (аналог уравнения Френеля для сред с разными показателями преломления), при варьировании параметров которых можно добиться изменения амплитудно-частотных характеристик волн.

Уравнения движения. Для каждого участка n (где $n = 1, 2, \dots, N$) стержня с длиной l_n , модулем упругости E_n и плотностью ρ_n можно записать уравнение движения для продольных колебаний. Уравнение движения для каждого участка будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial t^2} = \frac{E_n}{\rho_n} \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $u_n(x, t)$ — функция продольного перемещения стержня для n -го участка; x — пространственная координата; t — время.

Тогда скорость распространения волны в n -м участке стержня будет описываться для каждого слоя по отдельности:

$$c_n^2 = \frac{E_n}{\rho_n}. \quad (2)$$

Граничные и начальные условия. Граничное условие на левом конце (гармонические колебания):

$$u(0, t) = A_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

можно записать в комплексном виде:

$$\tilde{A} = A e^{i\varphi}, \quad (4)$$

где \tilde{A} — комплексная амплитуда, учитывающая фазу колебаний φ .

На правом конце применено условие неотражающих границ (условие Зоммерфельда [20, 21]), соответствующее уходящим на бесконечность волнам. В контексте дискретно-неоднородного материала это означает равенство нулю амплитуд волн, приходящих «справа» ($A_N^r = 0$).

Для аналитического решения рассматриваются начальные условия для уже установившихся колебаний (эквивалентно моменту времени, когда система уже вышла на стационарный режим), что соответствует начальным условиям $u_n(x, 0) = A_n^l e^{-ik_n x} + A_n^r e^{ik_n x}$, $u(0, 0) = A_0$, где A_0 — начальные амплитуды гармонического воздействия. Подобные условия исключают импульсный фронт.

Условия сшивки функций на границе раздела сред. Условия сшивки функций (неразрывность перемещений и напряжений на границах участков) в общем случае записываются в следующем виде:

$$\tilde{u}_n \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right) = \tilde{u}_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right); \quad (5)$$

$$E_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right) = E_{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right), \quad (6)$$

где $\tilde{u}_n \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ и $\tilde{u}_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ — комплексные перемещения в n -м и $n+1$ слоях на их границах раздела среды; $\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ и $\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ — комплексные деформации в n -м и $n+1$ слоях на их границах раздела среды.

Функция перемещений дискретно-неоднородного стержня при гармонических колебаниях. Решение уравнения для n -го слоя будет находиться в виде суммы бегущих волн (прямых и отраженных) в комплексных переменных:

$$\tilde{u}_n(x, t) = \tilde{A}_n^l e^{i(\omega t - k_n x)} + \tilde{A}_n^r e^{i(\omega t + k_n x)}, \quad (7)$$

где \tilde{A}_n^l и \tilde{A}_n^r — комплексные амплитуды волн для n -го слоя, распространяющихся налево и направо соответственно.

Система линейных алгебраических уравнений. Тогда общая система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных записывается следующим образом:

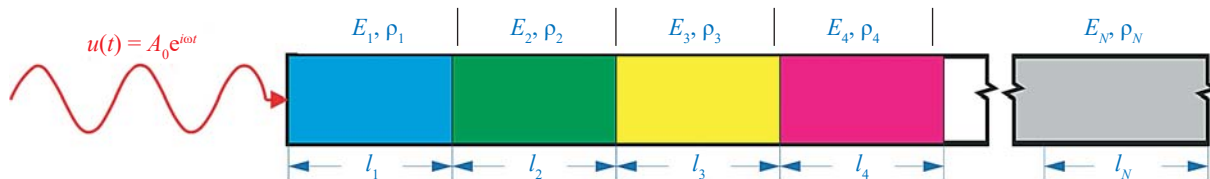


Рис. 1. Полубесконечная дискретно-неоднородная вязкоупругая одномерная среда с гармонической силовой нагрузкой, приложенной к левому концу, и неотражающими условиями справа

$$\begin{cases} A_n^l e^{-ik_n L_n} + A_n^r e^{ik_n L_n} = A_{n+1}^l e^{-ik_{n+1} L_n} + A_{n+1}^r e^{ik_{n+1} L_n}, \\ E_n [A_n^l (-ik_n) e^{-ik_n L_n} + A_n^r (ik_n) e^{ik_n L_n}] = \\ = E_{n+1} [A_{n+1}^l (-ik_{n+1}) e^{-ik_{n+1} L_n} + A_{n+1}^r (ik_{n+1}) e^{ik_{n+1} L_n}]; \\ A_0 = A_1^l + A_1^r; \\ A_N^r = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из системы алгебраических уравнений (8) получено общее решение для n участков (слоев), которое содержит $2n - 1$ неизвестных. Решение сводится к системе вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & -e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & -e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & 0 & 0 \\ -i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} E_1 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} E_1 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & -i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & -e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} & -e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} \\ 0 & 0 & -i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} E_3 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} & -i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} E_3 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Аналитическое решение для частной задачи будет представлено в виде выражения (7) и приведено в уравнении (11):

$$u(x, t) = \begin{cases} \text{Re} \left(A_1^l \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)} + A_1^r \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)} \right) & x < l_1 \\ \text{Re} \left(A_2^l \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)} + A_2^r \cdot e^{i(\omega t + k_2 x)} \right) & l_1 \leq x < l_1 + l_2 \\ \text{Re} \left(A_3^l \cdot e^{i(\omega t - k_3 x)} + A_3^r \cdot e^{i(\omega t + k_3 x)} \right) & l_1 + l_2 \leq x \end{cases} \quad (11)$$

Численное моделирование в ПК ANSYS Mechanical APDL. С целью численного моделирования задач волновой динамики в основном используют явные методы численного интегрирования уравнений движения, так как они просты в реализации. Для вычисления значения функции на текущем шаге применяются значения только на предыдущем шаге, однако это требует малого временного шага для устойчивости (например, метод Рунге – Кутты [22] или метод конечных разностей [23]). Неявные методы устойчивы при больших временных шагах и решают системы уравнений на каждом шаге, это делает будущие значения зависимыми от самих себя, что повышает их вычислительную сложность (например, метод Кранка – Николсона [24], метод Ньюмарка [25] или Гильбера – Хьюза – Тейлора- α (ННТ- α) [26]). Выбор метода зависит от требований к точности, устойчивости и доступных вычислительных ресурсов.

В настоящем исследовании для численного моделирования применялся ПК ANSYS Mechanical

$\{A\} = [K]^{-1}\{F\}$, (9) где $\{A\}$ — вектор неизвестных амплитуд колебаний в уравнении (7); $[K]$ — матрица коэффициентов; $\{F\}$ — вектор внешнего воздействия.

Решение для частного случая. Для конкретных расчетов и анализа закономерностей распространения гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных линейно-упругих стержнях рассмотрим случай, когда количество слоев (участков) $N = 3$. Далее приведена расширенная матрица коэффициентов $[K]$ для данного варианта:

APDL, реализующий неявные методы численного интегрирования уравнений движения.

В линейных системах динамики конструкций внутренняя нагрузка линейно пропорциональна узловым перемещениям, а матрица жесткости системы остается неизменной. Уравнение движения в матричной форме метода конечных элементов можно записать в следующем виде¹:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F^a\}, \quad (12)$$

где $[M]$ — глобальная матрица масс (обычно диагональная или согласованная); $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$, $\{F^a\}$ — векторы, характеризующие узловые ускорения, скорости, перемещения и нагрузку соответственно как функцию от времени; $[C]$ — глобальная матрица демпфирования; $[K]$ — глобальная матрица жесткости системы.

В настоящем исследовании система уравнений (12) разрешается методом Ньюмарка [25]. Семейство алгоритмов интегрирования Ньюмарка является одним из самых популярных методов интегрирования во времени как одношаговый алгоритм, который зарекомендовал себя в практике для задач неявной динамики в механике деформируемых твердых тел. Уравнение движения (12) можно переписать как:

$$[M]\{\ddot{u}_{n+1}\} + [C]\{\dot{u}_{n+1}\} + [K]\{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}^a\}, \quad (13)$$

где $\{\ddot{u}_{n+1}\} = \{\ddot{u}(t_{n+1})\}$, $\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}(t_{n+1})\}$ и $\{u_{n+1}\} = \{u(t_{n+1})\}$ — соответственно векторы узловых ускорений, скоростей и перемещений в момент времени (t_{n+1}) ; $\{F_{n+1}^a\} =$

¹ Theory Reference. Release 2024R1 ANSYS Inc. Canonsburg, 2024.

$= \{F_{n+1}^a(t_{n+1})\}$ — вектор приложенных узловых нагрузок.

В дополнение к уравнению (13) семейство алгоритмов интегрирования во времени Ньюмарка требует обновления перемещений и скоростей следующим образом:

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + [(1 - \delta)\{\ddot{u}_n\} + \delta\{\ddot{u}_{n+1}\}]\Delta t; \quad (14)$$

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\dot{u}_n\}\Delta t + [(1/2 - \alpha)\{\ddot{u}_n\} + \alpha\{\ddot{u}_{n+1}\}]\Delta t^2, \quad (15)$$

где α и δ — параметры интегрирования Ньюмарка

$$\left(\delta \geq \frac{1}{2}, \alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2 \right).$$

В конечном итоге схема интегрирования Ньюмарка состоит из трех уравнений конечных разностей, представленных в уравнении (13) через уравнения (14) и (15), а также трех неизвестных $\{\ddot{u}_{n+1}\}$, $\{\dot{u}_{n+1}\}$ и $\{u_{n+1}\}$, которые могут быть численно вычислены с помощью трех алгебраических уравнений вместе с тремя известными величинами $\{\ddot{u}_n\}$, $\{\dot{u}_n\}$ и $\{u_n\}$.

Используя три уравнения (13)–(15), одношаговый алгоритм в терминах неизвестной $\{u_{n+1}\}$ и трех известных величин можно записать:

$$(\alpha_0[M] + \alpha_1[C] + [K])\{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}^a\} + [M](\alpha_0\{\ddot{u}_n\} + \alpha_2\{\dot{u}_n\} + \alpha_3\{u_n\}) + [C](\alpha_1\{\dot{u}_n\} + \alpha_4\{\ddot{u}_n\} + \alpha_5\{u_n\}), \quad (16)$$

где $\alpha_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$, $\alpha_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$, $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$,

$\alpha_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$, $\alpha_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$ — параметры интегрирования.

Начальные и граничные условия. Граничное условие на левом конце задано аналогично условию в уравнении (3) в виде заданного вектора перемещения от времени. Неотражающие граничные условия (условия Зоммерфельда [20, 21]) отсутствуют в ПК ANSYS Mechanical APDL. Существуют несколько иных подходов для реализации неотражающих граничных условий в задачах волновой динамики:

1. Поглощающие граничные условия (Absorbing Boundary Conditions — ABC). Используются для минимизации отражений волн от границ расчетной области. Реализуются через специальные элементы FLUID129 или FLUID30 (для акустических задач) либо через поглощающие массы и демпферы. Основной принцип — добавление демпфирующих эффектов на границе.

2. Поглощающие слои (Perfectly Matched Layer — PML). Применяются для электромагнитных, акустических и некоторых упругих задач. PML создает ис-

кусственную область с материалом, поглощающим энергию волны без отражения. Настраивается через свойства материалов, задаваемых в элементах поглощающего слоя [27].

3. Импедансные границы. Используются для моделирования волнового сопротивления среды на границах. Часто применяются в акустике и задачах гидрогазодинамики для имитации открытых границ.

4. Бесконечные элементы (Infinite Elements). Типично применяются в акустических задачах (например, элементы INFIN110). Позволяют моделировать неограниченные области без искусственных отражений [28, 29].

Однако наиболее простым в реализации является метод продления расчетной области за границу интересующей области (на расстояние, значительно превышающее ее размер). Такой подход позволяет «естественным» способом давать возможность волнам уходить за пределы расчетной области. Но этот подход имеет и недостатки, связанные с тем, что сделать бесконечную расчетную область в численном моделировании невозможно. Волны, которые прошли через интересующую расчетную область, в какой-то момент времени начнут отражаться от правой границы. Для этого в численном моделировании была сделана дополнительная расчетная область (на рис. 2 область, показанная синим цветом), длина которой на порядок больше рассматриваемой области, и анализируется ограниченный отрезок времени до тех пор, пока волны не отразятся от правого конца.

Начальные условия для численного моделирования $u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$. Такой выбор обусловлен особенностями численного решения, когда назначение амплитуды в начальный момент времени может привести к импульсному воздействию. Выход процесса на установившийся режим колебаний происходит за некоторое время, обычно за время, когда первая волна пройдет от левого до правого края рассматриваемой расчетной области.

Выбор типа конечных элементов (КЭ) и параметры численного моделирования. Для численного моделирования применялся КЭ LINK180 — одноосный элемент растяжения-сжатия с тремя степенями свободы в каждом узле. Общее время моделирования составляло $t = 100$ при количестве шагов NSUBST = 1000.

Дискретизация расчетной области. Численное решение представлено для частного случая, когда количество слоев $N = 3$ (рис. 3). Как было сказано

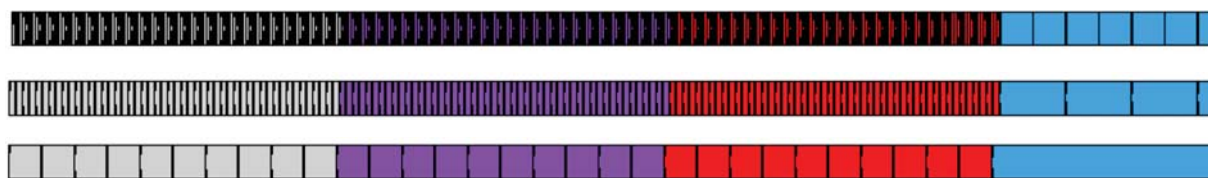


Рис. 2. Конечно-элементные модели при разных сеточных разбивках (30, 150 и 300 элементов)

в разделе с постановкой задачи, правый край стержня был продлен для ухода волн на значительное расстояние, чтобы избежать отражения и его влияния на интересующую область решения. Продленная область показана синим цветом на рис. 2 и не приведена в своей полной длине.

Для исследования сеточной сходимости рассматривалось три варианта конечно-элементной сетки с разбиением интересующей области стержня на 30, 150 и 300 элементов. Данное исследование проводится с целью определения оптимального размера КЭ для получения численного решения, независимого от сеточного разбиения. Сравнение численного решения будет проводиться с аналитическим решением для слоистого материала с одинаковыми скоростями распространения волн в среде (гармонические колебания равной амплитуды).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Аналитическое решение. На рис. 3, а представлены результаты для $N=3$ слоев для следующих случаев (при равных длинах участков $l_1 = l_2 = l_3 = 10$ м и одинаковой частоте внешнего воздействия $\omega = 1$):

1. Все скорости распространения волн равны между собой $c_1 = c_2 = c_3$. Такому варианту соответствуют следующие значения констант материала: $E_1 = E_2 = E_3 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

2. Когда скорости распространения волн для каждой следующей среды вдвое меньше $c_1 > c_2 > c_3$ ($c_1 = 2c_2$, $c_2 = 2c_3$). Такому варианту соответствуют следующие значения констант материала: $E_1 = 16$, $E_2 = 4$, $E_3 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

3. Когда скорости распространения волн для каждой следующей среды вдвое больше $c_1 < c_2 < c_3$ ($c_3 = 2c_2$, $c_2 = 2c_1$). Такому варианту соответствуют следующие значения констант материала: $E_1 = 1$, $E_2 = 4$, $E_3 = 16$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

4. Когда скорости распространения волн для каждой последующей среды $c_1 < c_2 > c_3$ ($c_2 = 4c_1$, $c_3 = 2c_1$). Такому варианту соответствуют следующие значения констант материала: $E_1 = 1$, $E_2 = 16$, $E_3 = 4$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

Материалы выбраны в безразмерных величинах: модули упругости нормированы на базовую величину E_0 , а плотности на ρ_0 .

Из полученных результатов можно сформулировать следующее:

1. Равенство скоростей распространения волн ($c_1 = c_2 = c_3$). Результаты показывают устойчивую передачу энергии через слои с минимальными искажениями и равномерную амплитуду колебаний.

2. Эффект усиления амплитуд колебаний и увеличения частоты колебаний, когда скорости распространения волн для каждой следующей среды вдвое меньше ($c_1 > c_2 > c_3$).

3. Эффект снижения амплитуд и уменьшения частоты колебаний, когда скорости распростране-

ния волн для каждой следующей среды вдвое больше ($c_1 < c_2 < c_3$).

4. Для случая, когда скорости распространения волн для каждой последующей среды определяются как $c_1 < c_2 > c_3$, возникает сложный переход в зоне между первым и вторым слоями, когда скорости распространения волны в средах отличаются в 4 раза.

Дискретно-неоднородный материал позволяет эффективно управлять характеристиками распространения волн. Изменяя свойства материала (плотность, модуль упругости), которые влияют на скорости распространения волн в среде, можно целенаправленно формировать амплитудно-частотные характеристики. Это открывает перспективы применения подобных структур для разработки направленных сейсмических барьеров, фильтров и волноводов.

Рассмотрим поведение дискретно-неоднородного стержня для случая, когда $c_1 < c_2 < c_3$ ($c_3 = 2c_2$, $c_2 = 2c_1$) при различных частотах внешних воздействий ($\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 5$, $\omega = 10$).

На рис. 3, б видно, что с увеличением частоты внешнего воздействия происходит значительное изменение амплитудно-частотных характеристик колебаний. В низкочастотной области амплитуды остаются относительно стабильными и имеют небольшую вариацию вдоль стержня. При увеличении частоты наблюдаются резонансные пики амплитуд, связанные с настройкой параметров материала и структуры стержня. Для высоких частот амплитуды резко изменяются, демонстрируя сложные колебательные паттерны. Наличие неоднородностей существенно влияет на форму и величину амплитуд. Параметры, такие как длины сегментов, частота внешнего воздействия и различия в свойствах материала (плотности, модулях упругости), играют ключевую роль в определении характера колебаний.

График на рис. 3, б подчеркивает важность учета частоты воздействия и структуры стержня при проектировании сейсмических барьеров и волноводов. Управление параметрами неоднородностей позволяет достигать целенаправленного подавления волн или формирования зон концентрации энергии.

Для тех же параметров материала рассмотрим изменение перемещений во времени при частоте внешнего воздействия $\omega = 5$ (рис. 3, с). Приведены результаты для трех моментов времени: с максимальными и минимальными амплитудами во времени, а также в момент, когда на левом конце стержня $u = 1$ (граничное условие принимает максимальное во времени значение).

В момент максимальной амплитуды наблюдаются выраженные пики в фиксированных точках, что связано с резонансными явлениями в неоднородной структуре стержня. В момент минимальной амплитуды колебания значительно затухают, что свидетельствует о фазовой интерференции волн

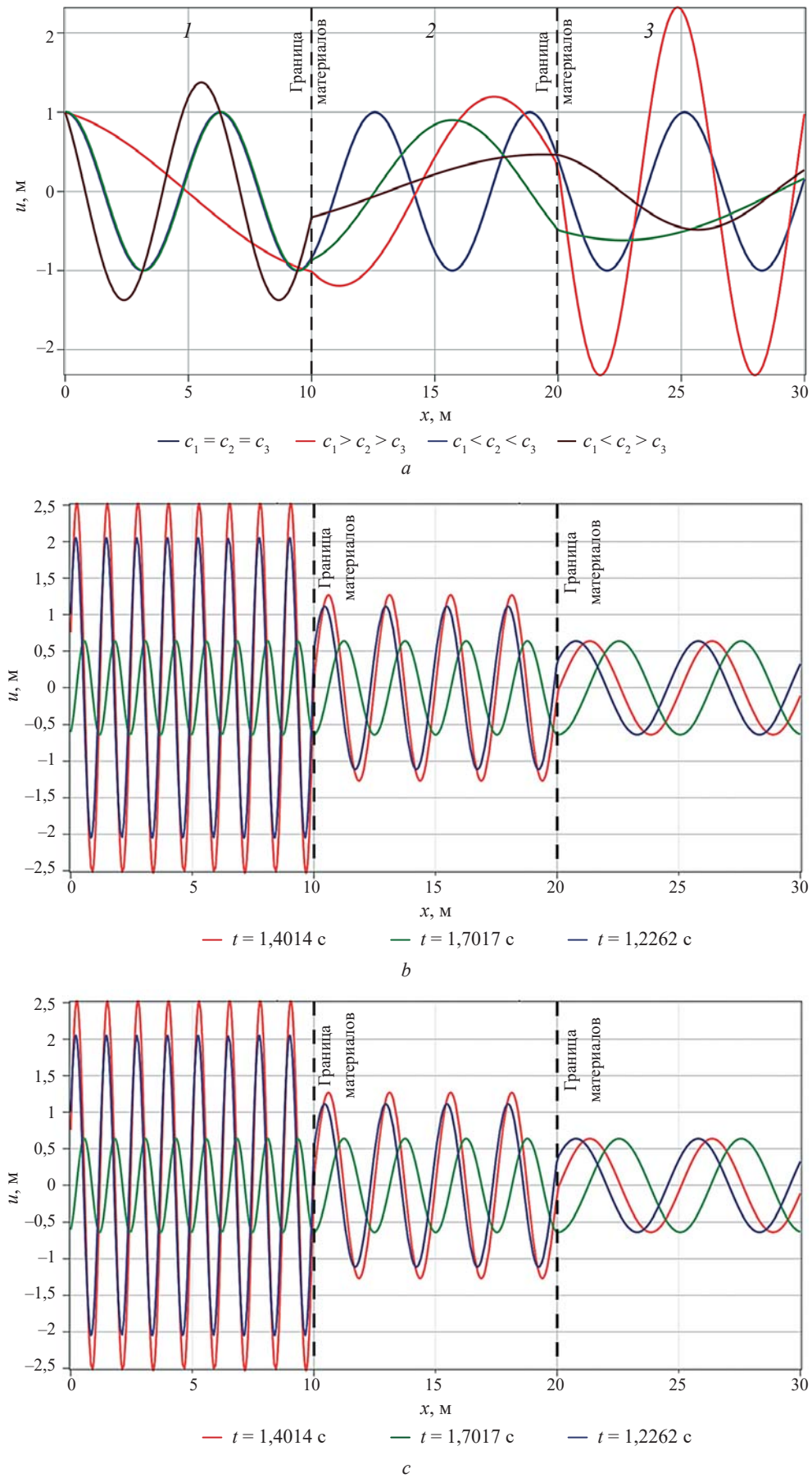


Рис. 3. Зависимость амплитуд колебаний: *a* — при различных параметрах материала (разных скоростях распространения волн в среде *c*); *b* — при различных частотах внешних воздействий ω ; *c* — от времени *t*

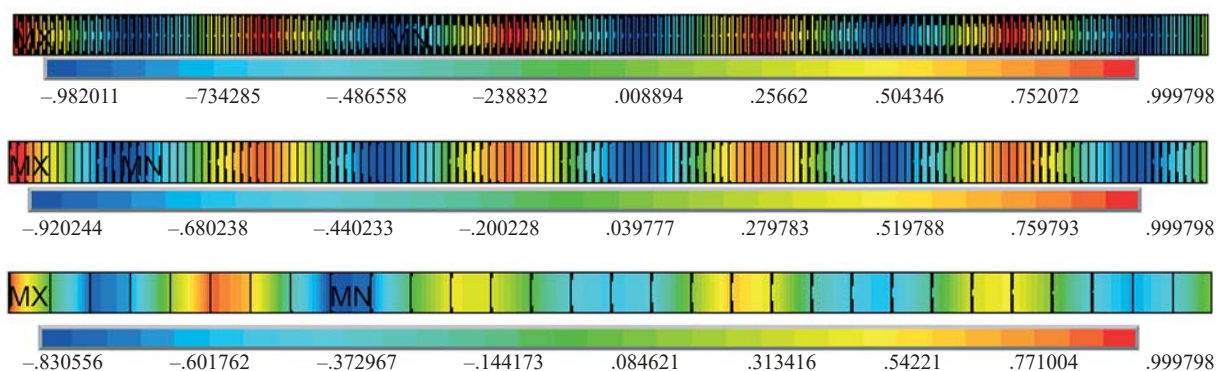


Рис. 4. Амплитуды перемещений однородного стержня при установившемся режиме колебаний для различных параметров сеточного разбиения расчетной области

в неоднородной системе. Неоднородность структуры стержня создает зоны концентрации энергии и участки значительного снижения амплитуды, что связано с отражением волн на границах участков с разными физико-механическими свойствами. В момент максимального воздействия на левом конце распределение амплитуд характеризуется сильным влиянием граничного условия, когда энергия интенсивно передается через стержень.

Динамика колебаний подчеркивает важность временного фактора для анализа волновых процессов в дискретно-неоднородных материалах, что связано с появлением как стоячих, так и бегущих волн. Взаимодействие волн, обусловленное неоднородностью, приводит к появлению сложных временных зависимостей, включая сдвиги фаз и амплитудные модуляции.

Численное решение в ПК ANSYS Mechanical APDL. На рис. 4, 5 представлены результаты исследова-

ния сеточной сходимости для разных вариантов конечно-элементных сеток в сравнении с аналитическим решением для слоистого материала с одинаковыми скоростями распространения волн в среде. Решением задачи в такой вариации служит установившийся гармонический сигнал с одинаковой амплитудой колебаний во всех слоях материала.

По результатам моделирования установлено, что при увеличении количества элементов точность численного решения возрастает, приближаясь к аналитическому. Более грубые сетки (например, 30 элементов) демонстрируют значительные отклонения от аналитических решений, что связано с недостаточной детализацией в моделировании градиентов напряжений и деформаций. На основании исследования сеточной сходимости оптимальные по точности решения были получены на сетке с разбиением 300 элементов. Данная сетка применялась для последующих расчетов уже дискретно-неоднородных мате-

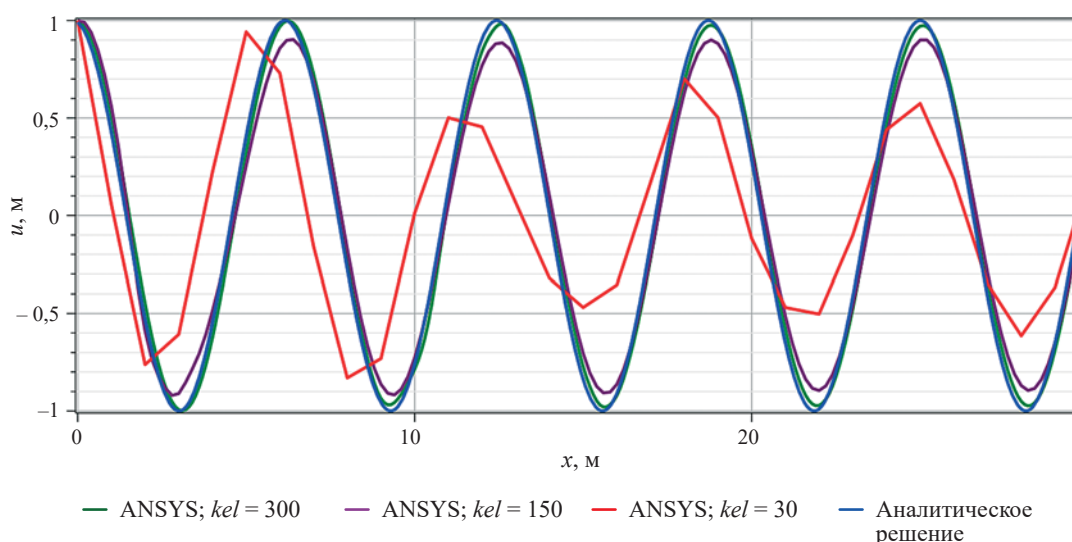


Рис. 5. Влияние сеточного разбиения на численное решение для однородного стержня

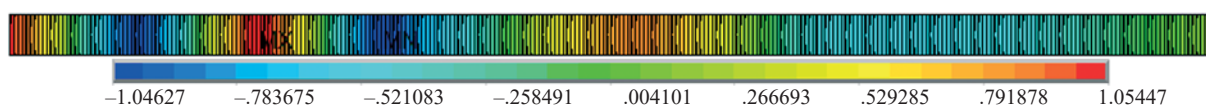


Рис. 6. Амплитуды перемещений дискретно-неоднородного стержня при установившемся режиме колебаний

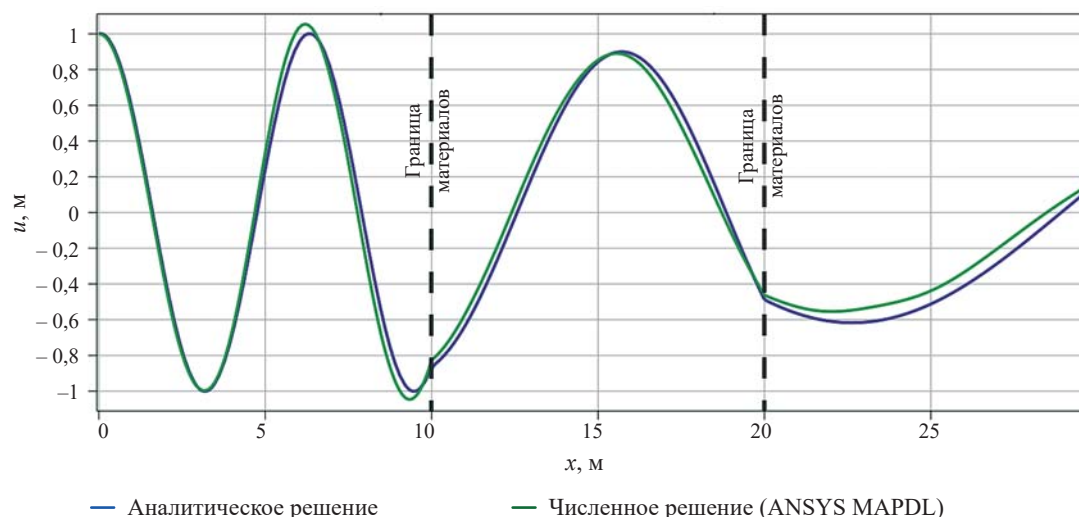


Рис. 7. Сопоставление аналитического и численного решений для дискретно-неоднородного стержня

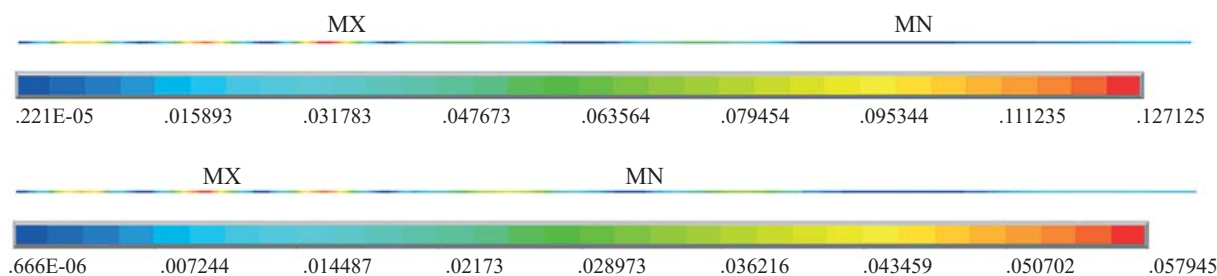


Рис. 8. Изменение удельной кинетической энергии (а) и потенциальной энергии (б) по длине дискретно-неоднородного стержня

риалов с разными скоростями распространения волн в средах.

Верификация численной модели. Рассматривался дискретно-неоднородный стержень для случая, когда $c_1 < c_2 < c_3$ ($c_3 = 2c_2$, $c_2 = 2c_1$). Константы материалов: $E_1 = 1$, $E_2 = 4$, $E_3 = 16$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$. На рис. 6, 7 приведены результаты численного моделирования в сравнении с аналитическим.

Числовое значение ошибки определялось на основе нормы разности между аналитическим и численным расчетом:

$$\epsilon_{\infty} = \frac{\max_x |u_a(x) - u_n(x)|}{\max_x |u_a(x)|} \cdot 100\%, \quad (17)$$

где $u_a(x)$, $u_n(x)$ — аналитическое и численное решение в точке x соответственно.

Результаты верификации показывают, что численное моделирование в ПК ANSYS Mechanical APDL позволяет адекватно (с точностью до 5 % в точке с наибольшим отклонением) описывать распределение амплитуд колебаний для дискретно-неоднородного материала.

На рис. 8 показаны соответствующие данному моменту времени значения кинетической энергии и энергии деформаций, из которых можно видеть, что их распределение вдоль неоднородного стержня неравномерно. Это связано с неоднородностью мате-

риала и частотой волнового воздействия. Максимумы энергии сосредоточены в определенных зонах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основе проведенного исследования моделирования распространения гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных линейно-упругих стержнях можно сформулировать следующие выводы:

1. Разработано общее аналитическое решение для гармонической акустической волны в полубесконечном дискретно-неоднородном линейно-упругом стержне, состоящем из произвольного количества слоев.

2. На основе разработанного аналитического решения установлены ключевые закономерности распространения гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных линейно-упругих стержнях. Выявлено, что дискретная неоднородность материала существенно влияет на амплитудно-частотные характеристики и распределение энергии колебаний, создавая как зоны усиления, так и ослабления динамических воздействий.

3. Показано, что целенаправленное изменение физических и геометрических свойств материала (модулей упругости, плотности, длин участков и количе-

ства слоев) позволяет формировать заданные амплитудно-частотные характеристики волновых полей.

4. Сопоставление аналитических решений с результатами численного моделирования в ПК ANSYS Mechanical APDL продемонстрировало их хорошее совпадение. Равномерная норма разности между аналитическим и численным расчетом не превышала 5 %. Детализированные конечно-элементные расчеты показали, что для рассматриваемой модели обеспечивается сходимость конечно-элементных аппроксимаций к аналитическому решению.

5. Полученные результаты открывают широкие перспективы для инженерных применений.

Управляя параметрами неоднородности, можно проектировать сейсмические барьеры, волноводы и фильтры с заранее заданными динамическими свойствами, повышая устойчивость конструкций к вибрационным и сейсмическим воздействиям. Таким образом, разработанное аналитическое решение и предложенная методика численного моделирования волновой динамики дискретно-неоднородных стержней могут служить основой для дальнейших теоретических исследований и прикладных разработок в области волновой динамики неоднородных материалов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Wu L., Wang Y., Chuang K., Wu F., Wang Q., Lin W. et al. A brief review of dynamic mechanical metamaterials for mechanical energy manipulation // *Materials Today*. 2021. Vol. 44. Pp. 168–193. DOI: 10.1016/j.mattod.2020.10.006
2. Reismann H., Tsai L.W. Wave Propagation in Discretely Inhomogeneous Elastic Cylindrical Rods — A Comparison of Two Theories // *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1972. Vol. 52. Issue 1. Pp. 1–10. DOI: 10.1002/zamm.19720520101
3. Brekhovskikh L.M. *Waves in Layered Media*. New York : Academic Press, 1980. 503 p.
4. Ewing M., Jardetzky W., Press F. *Elastic Waves in Layered Media*. New York : McGraw-Hill, 1957. 405 p.
5. Aki K., Richards P.G. *Quantitative Seismology*. 2nd Ed. University Science Books, 2002. 700 p.
6. Kuznetsov S.V. Love waves in stratified monoclinic media // *Quarterly of Applied Mathematics*. 2004. Vol. 62. Issue 4. Pp. 749–766. DOI: 10.1090/qam/2104272
7. Kayuk Y.F., Shekera M.K. On one dynamic problem for structurally inhomogeneous beams // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43. Issue 11. Pp. 1256–1263. DOI: 10.1007/s10778-007-0129-0
8. Mazzei A.J., Scott R.A. Harmonic Forcing of Damped Non-homogeneous Elastic Rods // *Sensors and Instrumentation, Aircraft/Aerospace, Energy Harvesting & Dynamic Environments Testing*. 2025. Vol. 7. Pp. 33–43. DOI: 10.1007/978-3-030-12676-6_3
9. Kuznetsov S.V. Acoustic waves in functionally graded rods with periodic longitudinal inhomogeneity // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30. Issue 7. Pp. 1410–1416. DOI: 10.1080/15376494.2022.2032888
10. Šalinić S., Obradović A., Tomović A. Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams // *Composites Part B: Engineering*. 2018. Vol. 150. Pp. 135–143. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.05.060
11. Safari-Kahnaki A., Hosseini S.M., Tahani M. Thermal shock analysis and thermo-elastic stress waves in functionally graded thick hollow cylinders using analytical method // *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2011. Vol. 7. Issue 3. Pp. 167–184. DOI: 10.1007/s10999-011-9157-3
12. Wu B., Su Y.P., Liu D.Y., Chen W.Q., Zhang C.Z. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders // *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 412. Pp. 17–47. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.01.055
13. Sajid N., Akram G. Solitary dynamics of longitudinal wave equation arises in magneto-electro-elastic circular rod // *Modern Physics Letters B*. 2021. Vol. 35. Issue 5. P. 2150086. DOI: 10.1142/S021798492150086X
14. Keles İ., Aydın K. Practical Jointed Approach to Functionally Graded Structures // *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2020. Vol. 12. Issue 2. Pp. 57–69.
15. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoustical Physics*. 2011. Vol. 57. Issue 3. Pp. 420–426. DOI: 10.1134/S1063771011030109
16. Kuznetsov S.V. Acoustic black hole in a hyperelastic rod // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2023. Vol. 74. Issue 3. DOI: 10.1007/s00033-023-02020-x
17. Bratov V., Murachev A., Kuznetsov S.V. Utilization of a Genetic Algorithm to Identify Optimal Geometric Shapes for a Seismic Protective Barrier // *Mathematics*. 2024. Vol. 12. Issue 3. P. 492. DOI: 10.3390/math12030492
18. Кузнецов С.В., Саиян С.Г. Нелинейные акустические волны в гиперупругих стержнях // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2025. № 2. С. 210–225. DOI: 10.31857/S1026351925020129. EDN ANREGK.
19. Shemali A.A., Javkhlan S., Kuznetsov S. Seismic protection from bulk and surface waves // *AIP Conference Proceedings*. 2023. Vol. 2759. P. 030006. DOI: 10.1063/5.0103993

20. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1912. Vol. 21. Pp. 309–353.
21. Modestov K., Saiyan S., Erokhin A., Brygar O. Derivation of the one-dimensional radiation condition in elasticity theory by introducing infinitesimal viscosity // E3S Web of Conferences. 2023. Vol. 410. P. 03025. DOI: 10.1051/e3sconf/202341003025
22. Butcher J. Runge-kutta methods // Scholarpedia. 2007. Vol. 2. Issue 9. P. 3147. DOI: 10.4249/scholarpedia.3147
23. Carpenter M.H., Gottlieb D., Abarbanel S. Time-stable boundary conditions for finite-difference schemes solving hyperbolic systems: methodology and application to high-order compact schemes // Journal of Computational Physics. 1994. Vol. 111. Issue 2. Pp. 220–236. DOI: 10.1006/jcph.1994.1057
24. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1947. Vol. 43. Issue 1. Pp. 50–67. DOI: 10.1017/S0305004100023197
25. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics // Journal of the Engineering Mechanics Division. 1959. Vol. 85. Issue 3. Pp. 67–94. DOI: 10.1061/jmcea3.0000098
26. Hilber H.M., Hughes T.J.R., Taylor R.L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 1977. Vol. 5. Issue 3. Pp. 283–292. DOI: 10.1002/eqe.4290050306
27. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // Computers and Geotechnics. 2019. Vol. 109. Pp. 69–81. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.01.019
28. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // European Journal of Environmental and Civil Engineering. 2020. Vol. 24. Issue 14. Pp. 2400–2421. DOI: 10.1080/19648189.2018.1506826
29. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // Computers and Geotechnics. 2021. Vol. 131. P. 103808. DOI: 10.1016/j.compgeo.2020.103808

Поступила в редакцию 13 ноября 2025 г.

Принята в доработанном виде 13 декабря 2025 г.

Одобрена для публикации 30 декабря 2025 г.

Об авторе: **Сергей Гургенович Саиян** — научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов им. А.Б. Золотова (НОЦ КМ им. А.Б. Золотова), старший преподаватель кафедры строительной и теоретической механики, преподаватель кафедры информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; младший научный сотрудник; **Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)**; 119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1; SPIN-код: 3337-7862, РИНЦ ID: 987238, Scopus: 57195230884, ResearcherID: AAT-1424-2021, ORCID: 0000-0003-0694-4865; berformert@gmail.com.

INTRODUCTION

Problem statement. The propagation of harmonic longitudinal waves in mechanically inhomogeneous rods with a discretely inhomogeneous structure represents an important fundamental and applied problem for a number of engineering fields. With the increasing complexity of structural materials and the emergence of new composite structures, there is a need for a more accurate and detailed description of the wave processes arising under various external influences.

An approach based on inhomogeneous materials allows the wave properties of a system to be shaped by creating waveguides [1] or filters with specified resonance characteristics, thereby purposefully controlling the processes of mechanical energy transfer.

Linear-elastic media containing discretely inhomogeneous inclusions [2–8] or possessing a periodic (functional-gradient) structure [9–14] are of particular interest, as the wave processes in such systems differ significantly from their counterparts in homogeneous continuous media. In particular, the presence of inhomogeneities leads to wave scattering, changes in their propagation speeds, and the formation of complex stress and strain fields. Understanding these processes makes it possible to optimize the design of engineering systems, predict the dynamic behaviour of materials, and develop new waveguide structures with specified properties.

The use of discretely heterogeneous materials. One area of application for discretely heterogeneous materials in construction is seismic barriers [15–19]. Seismic barriers are structures or materials specifically designed to suppress or deflect the propagation of seismic waves

in the ground and building structures. The basic principle behind their operation is to create obstacles to mechanical energy, thereby preventing the transmission of vibrations to the protected structure. One possible solution for creating seismic barriers is the use of discretely heterogeneous media. Discrete heterogeneity means that the structure in question consists of a multitude of sections, each of which possesses unique physical and mechanical properties. Such structures allow the wave propagation characteristics to be significantly altered, ensuring effective attenuation of dynamic impacts on the structure.

Aims and objectives of the study. Within the scope of this study, a general analytical solution for the wave field has been developed for semi-infinite discretely inhomogeneous rods consisting of an arbitrary number of material layers (Fig. 1). Particular attention is paid to studying the behaviour of discretely inhomogeneous rods when subjected to harmonic longitudinal waves of varying frequencies, as well as to analyzing discrete inhomogeneities with different longitudinal wave propagation speeds. Numerical simulations are also carried out using the ANSYS Mechanical APDL software package to verify the analytical results obtained and subsequently solve wave dynamics problems in heterogeneous media.

This study therefore aims to investigate the fundamental processes of wave propagation in semi-infinite, discretely inhomogeneous, linearly elastic media. The results obtained may be used in the development of methods for designing seismic barriers with specified characteristics, and may be of use to designers and engineers involved in the development and implementation of measures to protect infrastructure from seismic and other impacts, as well as to researchers interested in wave processes in inhomogeneous structures.

MATERIALS AND METHODS

Problem statement. We consider a semi-infinite, discretely inhomogeneous, linearly elastic rod with a harmonic force applied to the left end and a Sommerfeld boundary condition at the right end (for waves propagating to infinity), as shown in Fig. 1. This problem is of interest due to the effect of refracted and reflected waves at the interfaces between media with different wave propagation speeds (analogous to the Fresnel equation for media with different refractive indices),

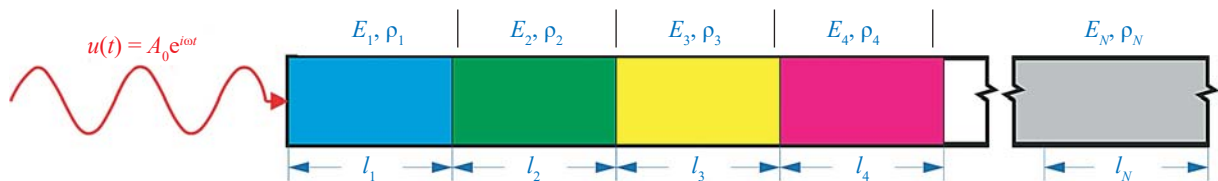


Fig. 1. A semi-infinite, discretely inhomogeneous, viscoelastic one-dimensional medium with a harmonic force applied to the left end and non-reflecting boundary conditions on the right

where varying these parameters allows one to alter the amplitude-frequency characteristics of the waves.

Equations of motion. For each segment n (where $n = 1, 2, \dots, N$) of a rod of length l_n , with elastic modulus E_n and density ρ_n , an equation of motion for longitudinal vibrations can be written. The equation of motion for each segment will take the following form:

$$\frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial t^2} = \frac{E_n}{\rho_n} \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

where $u_n(x, t)$ — the longitudinal displacement function of the rod for the n -th section; x — spatial coordinate; t — time.

In that case, the wave velocity in the n -th section of the rod will be described separately for each layer:

$$c_n^2 = \frac{E_n}{\rho_n}. \quad (2)$$

Boundary and initial conditions. Boundary condition at the left end (harmonic oscillations):

$$u(0, t) = A_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

can be written in complex form:

$$\tilde{A} = A e^{i\varphi}, \quad (4)$$

where \tilde{A} — the effective amplitude, which takes into account the phase of the oscillations, φ .

At the right-hand end, the non-reflecting boundary condition (the Sommerfeld condition [20, 21]) is applied, corresponding to waves propagating to infinity. In the context of a discretely inhomogeneous material, this implies that the amplitudes of waves arriving “from the right” are zero ($A_N^r = 0$).

For the analytical solution, the initial conditions for steady-state oscillations are considered (equivalent to the moment in time when the system has already reached a steady state), which corresponds to the initial conditions $u_n(x, 0) = A_n^l e^{-ik_n x} + A_n^r e^{ik_n x}$, $u(0, 0) = A_0$, where A_0 — initial amplitudes of the harmonic excitation. Such condition rule out a sharp transition.

Boundary conditions for the continuity of functions at the interface between media. The boundary conditions for the continuity of functions (continuity of displacements and stresses at the boundaries between regions) are generally expressed as follows:

$$\tilde{u}_n \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right) = \tilde{u}_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right); \quad (5)$$

$$E_n \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right) = E_{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right), \quad (6)$$

where $\tilde{u}_n \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ and $\tilde{u}_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ — complex displacements in the n -th and $(n + 1)$ layers at their interface; $\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ and $\frac{\partial \tilde{u}_{n+1}}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n l_i, t \right)$ — complex deformations in the n -th and $(n + 1)$ layers at their interface.

The displacement function of a discretely inhomogeneous rod under harmonic vibrations. The solution to the equation for the n -th layer will take the form of a sum of travelling waves (incident and reflected) in complex variables:

$$\tilde{u}_n(x, t) = \tilde{A}_n^l e^{i(\omega t - k_n x)} + \tilde{A}_n^r e^{i(\omega t + k_n x)}, \quad (7)$$

where \tilde{A}_n^l и \tilde{A}_n^r — the complex wave amplitudes for the n -th layer, propagating to the left and

A system of linear algebraic equations. The general system of linear algebraic equations in terms of the unknowns is then written as follows:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & -e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & -e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & 0 & 0 \\ -i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} E_1 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} E_1 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} l_1} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & -i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & -e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} & -e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} \\ 0 & 0 & -i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} E_2 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} (l_1 + l_2)} & i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} E_3 e^{-i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} & -i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} E_3 e^{i\omega \sqrt{\frac{\rho_3}{E_3}} (l_1 + l_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

The analytical solution to the specific problem will be presented in the form of expression (7) and given in equation (11):

$$u(x, t) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\tilde{A}_1^l \cdot e^{i(\omega t - k_1 x)} + \tilde{A}_1^r \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)} \right) & x < l_1 \\ \operatorname{Re} \left(\tilde{A}_2^l \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)} + \tilde{A}_2^r \cdot e^{i(\omega t + k_2 x)} \right) & l_1 \leq x < l_1 + l_2, \\ \operatorname{Re} \left(\tilde{A}_3^l \cdot e^{i(\omega t - k_3 x)} + \tilde{A}_3^r \cdot e^{i(\omega t + k_3 x)} \right) & l_1 + l_2 \leq x \end{cases} \quad (11)$$

Numerical modelling in ANSYS Mechanical APDL. For the numerical modelling of wave dynamics problems, explicit methods of numerical integration of the equations of motion are generally used, as they are straightforward to implement. To calculate the value of the function at the current step, only the values from the previous step are used; however, this requires a small-time step for stability (for example, the Runge – Kutta method [22] or the finite difference method [23]). Implicit methods are stable with large time steps and solve systems of equations at each step; this makes future

$$\begin{cases} \tilde{A}_n^l e^{-ik_n L_n} + \tilde{A}_n^r e^{ik_n L_n} = \tilde{A}_{n+1}^l e^{-ik_{n+1} L_n} + \tilde{A}_{n+1}^r e^{ik_{n+1} L_n}; \\ E_n \left[\tilde{A}_n^l (-ik_n) e^{-ik_n L_n} + \tilde{A}_n^r (ik_n) e^{ik_n L_n} \right] = \\ = E_{n+1} \left[\tilde{A}_{n+1}^l (-ik_{n+1}) e^{-ik_{n+1} L_n} + \tilde{A}_{n+1}^r (ik_{n+1}) e^{ik_{n+1} L_n} \right]; \\ A_0 = A_1^l + A_1^r; \\ A_N^r = 0. \end{cases} \quad (8)$$

From the system of algebraic equations (8), a general solution was obtained for n sections (layers), which contains $2n - 1$ unknown. The solution reduces to a system of the form:

$$\{A\} = [K]^{-1} \{F\}, \quad (9)$$

where $\{A\}$ — the vector of unknown oscillation amplitudes in the equation (7); $[K]$ — coefficient matrix; $\{F\}$ — the vector of external influence.

Solution for a special case. For specific calculations and analysis of the propagation patterns of harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous linearly elastic rods, let us consider the case where the number of layers (sections) is $N = 3$. The extended coefficient matrix $[K]$ for this variant is given below:

values dependent on themselves, which increases their computational complexity (e.g., the Crank – Nicholson method [24], the Newmark method [25] or the Hilbert – Hughes – Taylor- α (HHT- α) method [26]). The choice of method depends on the requirements for accuracy, stability and available computational resources.

In this study, ANSYS Mechanical APDL software was used for numerical modelling, which implements implicit methods for the numerical integration of the equations of motion.

In linear structural dynamics systems, the internal load is linearly proportional to the nodal displacements, and the stiffness matrix of the system remains constant. The equation of motion in matrix form for the finite element method can be written as follows¹:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{F^a\}, \quad (12)$$

where $[M]$ — global mass matrix (usually diagonal or consistent); $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$, $\{F^a\}$ — vectors characterizing the nodal accelerations, velocities, displacements

¹ Theory Reference. Release 2024R1 ANSYS Inc. Canonsburg, 2024.

and load, respectively, as functions of time; $[C]$ — global damping matrix; $[K]$ — global stiffness matrix of the system.

In this study, the system of equations (12) is solved using the Newmark method [25]. The family of Newmark integration algorithms is one of the most popular methods of time integration as a single-step algorithm, which has proven itself in practice for implicit dynamics problems in the mechanics of deformable solids. The equation of motion (12) can be rewritten as:

$$[M]\{\ddot{u}_{n+1}\} + [C]\{\dot{u}_{n+1}\} + [K]\{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}^a\}, \quad (13)$$

where $\{\ddot{u}_{n+1}\} = \{\ddot{u}(t_{n+1})\}$, $\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}(t_{n+1})\}$ and $\{u_{n+1}\} = \{u(t_{n+1})\}$ — accordingly, the vectors of nodal accelerations, velocities and displacements at a given instant (t_{n+1}); $\{F_{n+1}^a\} = \{F_{n+1}^a(t_{n+1})\}$ — the vector of applied nodal loads.

In addition to Equation (13), the family of Newmark time-integration algorithms requires the displacements and velocities to be updated as follows:

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + [(1 - \delta)\{\dot{u}_n\} + \delta\{\ddot{u}_{n+1}\}]\Delta t; \quad (14)$$

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\dot{u}_n\}\Delta t + [(1/2 - \alpha)\{\ddot{u}_n\} + \alpha\{\ddot{u}_{n+1}\}]\Delta t^2, \quad (15)$$

where α and δ — Newmark integration parameters $\left(\delta \geq \frac{1}{2}, \alpha \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2\right)$.

Ultimately, the Newmark integration scheme consists of three finite difference equations, expressed in equation (13) in terms of equations (14) and (15), as well as three unknowns $\{\ddot{u}_{n+1}\}$, $\{\dot{u}_{n+1}\}$ and $\{u_{n+1}\}$, which can be calculated numerically using three algebraic equations together with three known values $\{\ddot{u}_n\}$, $\{\dot{u}_n\}$ and $\{u_n\}$.

Using equations (13)–(15), the one-step algorithm in terms of the unknown $\{u_{n+1}\}$ and the three known quantities can be written as:

$$(\alpha_0[M] + \alpha_1[C] + [K])\{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}^a\} + [M](\alpha_0\{\dot{u}_n\} + \alpha_2\{\ddot{u}_n\} + \alpha_3\{\ddot{u}_{n+1}\}) + [C](\alpha_1\{\dot{u}_n\} + \alpha_4\{\dot{u}_{n+1}\} + \alpha_5\{\ddot{u}_{n+1}\}), \quad (16)$$

where $\alpha_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}$, $\alpha_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}$, $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$,

$\alpha_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$, $\alpha_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right)$ — integration parameters.

Initial and boundary conditions. The boundary condition at the left end is defined in the same way as the condition in equation (3), in the form of a specified displacement vector as a function of time. Non-reflecting boundary conditions (Sommerfeld conditions [20, 21]) are not available in the ANSYS Mechanical APDL code. There are several other approaches for implementing non-reflecting boundary conditions in wave dynamics problems:

1. Absorbing boundary conditions (ABC). These are used to minimize wave reflections from the boundaries of the computational domain. They are implemented using special FLUID129 or FLUID30 elements (for acoustic problems) or via absorbing masses and dampers. The basic principle is to introduce damping effects at the boundary.

2. Perfectly Matched Layers (PML). These are used for electromagnetic, acoustic and certain elastic problems. PML creates an artificial region with a material that absorbs wave energy without reflection. Configured via the material properties specified in the absorbing layer elements [27].

3. Impedance boundaries. Used to model the wave impedance of the medium at boundaries. Frequently used in acoustics and hydrodynamic problems to simulate open boundaries.

4. Infinite elements. Typically used in acoustic problems (e.g., INFIN110 elements). They allow the modelling of unbounded domains without artificial reflections [28, 29].

However, the simplest method to implement is to extend the computational domain beyond the boundaries of the region of interest (by a distance significantly greater than its size). This approach allows waves to propagate beyond the computational domain in a “natural” manner. However, this approach also has drawbacks, stemming from the fact that it is impossible to create an infinite computational domain in numerical modelling. Waves that have passed through the region of interest will, at some point in time, begin to reflect off the right boundary. To address this, an additional computational domain was created in the numerical simulation (the area shown in blue in Fig. 2), the length of which is an order of magnitude greater than the domain under consideration, and a limited time interval is analyzed until the waves reflect off the right-hand end.

Initial conditions for numerical simulation $u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$. This choice is dictated by the nature of the numerical solution, where specifying an amplitude at the initial time could result in an impulsive effect. The process reaches a steady-state oscillation after a certain period of time, typically the time it takes for the first wave to travel from the left to the right edge of the computational domain under consideration.

Selection of finite element (FE) types and numerical simulation parameters. For the numerical simulation, the LINK180 FE was used — a uniaxial tension-compression element with three degrees of freedom at each node. The total simulation time was $t = 100$, with a number of steps NSUBST = 1,000.

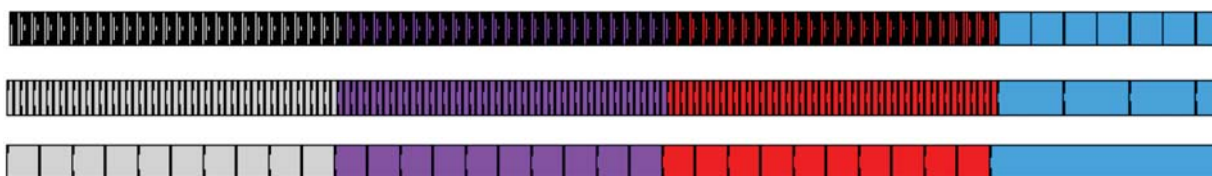


Fig. 2. Finite element models for different mesh configurations (30, 150 and 300 elements)

Discretization of the computational domain. The numerical solution is presented for the special case where the number of layers is $N = 3$ (Fig. 3). As stated in the problem statement section, the right-hand end of the rod was extended to allow the waves to propagate over a considerable distance, in order to avoid reflection and its influence on the region of interest in the solution. The extended domain is shown in blue in Fig. 2 and is not shown in its full length.

To investigate mesh convergence, three finite element mesh configurations were examined, with the region of interest on the rod divided into 30, 150 and 300 elements. The aim of this study is to determine the optimal element size for obtaining a numerical solution that is independent of the mesh configuration. The numerical solution will be compared with the analytical solution for a layered material with identical wave propagation velocities in the medium (harmonic oscillations of equal amplitude).

RESEARCH RESULTS

Analytical solution. Fig. 3(a) shows the results for $N = 3$ layers in the following cases (assuming equal segment lengths $l_1 = l_2 = l_3 = 10$ m and the same frequency of external excitation $\omega = 1$):

1. All wave propagation speeds are equal $c_1 = c_2 = c_3$. This scenario corresponds to the following values for the material constants: $E_1 = E_2 = E_3 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

2. When the wave propagation speeds for each successive medium are half those of the previous one $c_1 > c_2 > c_3$ ($c_1 = 2c_2$, $c_2 = 2c_3$). The following material constants apply: $E_1 = 16$, $E_2 = 4$, $E_3 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

3. When the wave propagation speeds for each successive medium are twice as high $c_1 < c_2 < c_3$ ($c_3 = 2c_2$, $c_2 = 2c_1$). The following values of the material constants apply: $E_1 = 1$, $E_2 = 4$, $E_3 = 16$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

4. When the wave propagation speeds for each successive medium are $c_1 < c_2 > c_3$ ($c_2 = 4c_1$, $c_3 = 2c_1$). This scenario corresponds to the following values for the material constants: $E_1 = 1$, $E_2 = 16$, $E_3 = 4$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$.

The materials were selected in dimensionless units: the elastic moduli are normalized to a base value of E_0 , and the densities to ρ_0 .

The following conclusions can be drawn from the results obtained:

1. Equality of wave propagation speeds ($c_1 = c_2 = c_3$). The results show stable energy transfer through the layers with minimal distortion and a uniform oscillation amplitude.

2. The effect of amplified oscillation amplitudes and increased oscillation frequency when the wave propagation speeds for each subsequent medium are half as fast ($c_1 > c_2 > c_3$).

3. The effect of reduced amplitudes and decreased oscillation frequency when the wave propagation speeds for each subsequent medium are twice as fast ($c_1 < c_2 < c_3$).

4. In cases where the wave propagation speeds for each successive medium are defined as $c_1 < c_2 > c_3$,

a complex transition occurs in the region between the first and second layers, where the wave propagation speeds in the media differ by a factor of four.

A discretely heterogeneous material allows for effective control of wave propagation characteristics. By altering the material properties (density, elastic modulus) that influence wave propagation speeds within the medium, it is possible to deliberately shape the amplitude-frequency characteristics. This opens up prospects for the application of such structures in the development of directional seismic barriers, filters and waveguides.

Let us consider the behaviour of a discretely inhomogeneous rod in the case where $c_1 < c_2 < c_3$ ($c_3 = 2c_2$, $c_2 = 2c_1$) at different frequencies of external influences ($\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 5$, $\omega = 10$).

Fig. 3(b) shows that as the frequency of the external excitation increases, there is a significant change in the amplitude-frequency characteristics of the oscillations. In the low-frequency range, the amplitudes remain relatively stable and vary only slightly along the rod. As the frequency increases, resonant amplitude peaks are observed, associated with the tuning of the material parameters and the rod structure. At high frequencies, the amplitudes change sharply, exhibiting complex oscillation patterns. The presence of inhomogeneities significantly influences the shape and magnitude of the amplitudes. Parameters such as segment lengths, the frequency of the external excitation, and differences in material properties (density, elastic moduli) play a key role in determining the nature of the vibrations.

The graph in Fig. 3(b) highlights the importance of taking into account the frequency of the excitation and the structure of the rod when designing seismic barriers and waveguides. By controlling the parameters of the inhomogeneities, it is possible to achieve targeted wave attenuation or the formation of energy concentration zones.

For the same material parameters, let us consider the variation of displacements over time at the frequency of the external excitation $\omega = 5$ (Fig. 3, c). Results are shown for three points in time: at the maximum and minimum amplitudes over time, and at the moment when, at the left end of the rod $u = 1$ (the boundary condition takes its maximum value over time).

At the point of maximum amplitude, pronounced peaks are observed at fixed points, which is attributed to resonant phenomena within the rod's inhomogeneous structure. At the point of minimum amplitude, the oscillations are significantly damped, indicating phase interference of waves within the inhomogeneous system. The inhomogeneity of the rod's structure creates zones of energy concentration and regions of significant amplitude reduction, which is associated with the reflection of waves at the boundaries between regions with different physical and mechanical properties. At the point of maximum excitation at the left end, the amplitude distribution is characterized by a strong

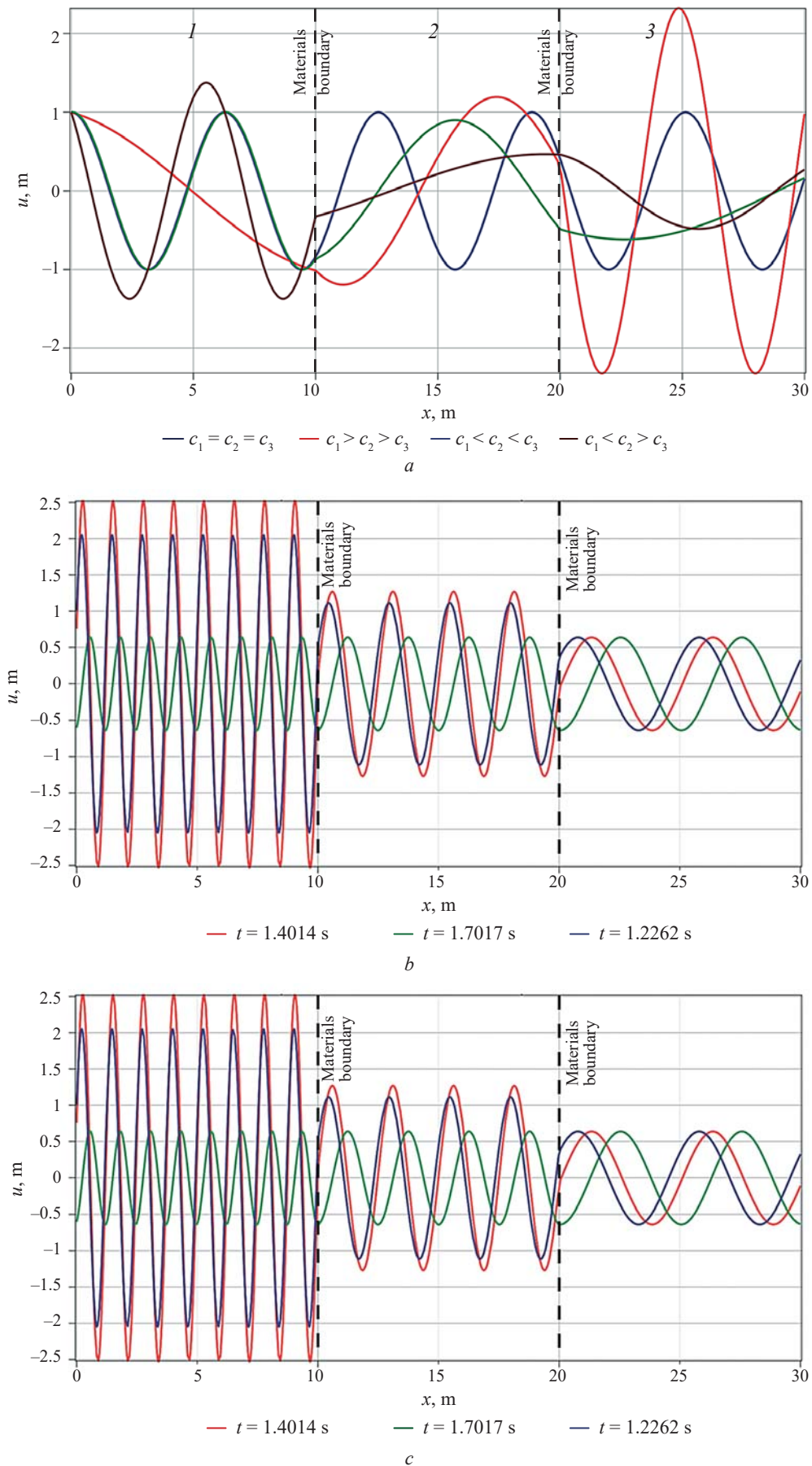


Fig. 3. Dependence of oscillation amplitudes: *a* — for different material parameters (different wave propagation speeds in the medium, *c*); *b* — for different frequencies of external excitation, ω ; *c* — as a function of time, t

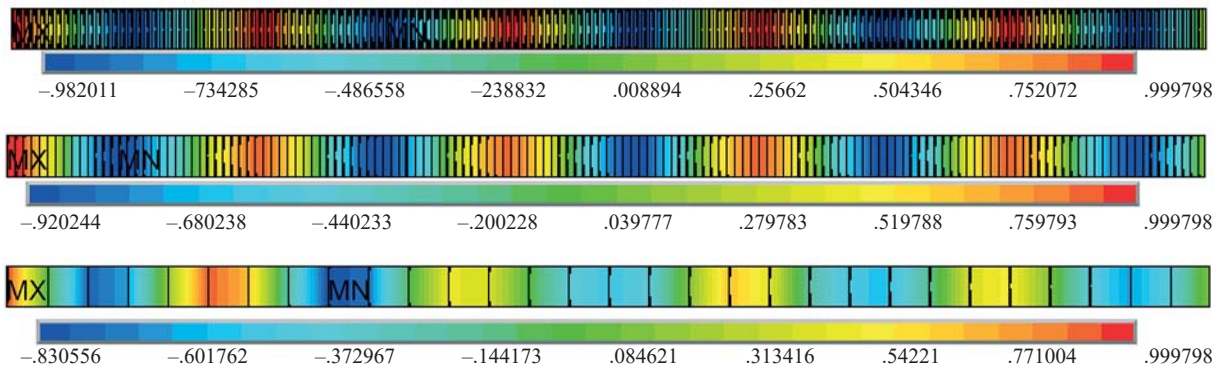


Fig. 4. Displacement amplitudes of a homogeneous rod in steady-state vibration for various mesh parameters of the computational domain

influence of the boundary condition, where energy is intensively transmitted through the rod.

The dynamics of the oscillations highlight the importance of the time factor in analyzing wave processes in discretely inhomogeneous materials, which is associated with the appearance of both standing and travelling waves. Wave interaction caused by inhomogeneity leads to the emergence of complex time-dependent relationships, including phase shifts and amplitude modulations.

Numerical solution in ANSYS Mechanical APDL. Fig. 4 and 5 present the results of a mesh convergence study for different finite element mesh configurations, compared with the analytical solution for a layered material with uniform wave propagation velocities throughout the medium. The solution to the problem in this configuration is a steady-state harmonic signal with a uniform amplitude of oscillation across all layers of the material.

The simulation results show that as the number of elements increases, the accuracy of the numerical solution improves, approaching the analytical solution. Coarser

meshes (e.g. 30 elements) exhibit significant deviations from the analytical solutions, which is due to insufficient detail in the modelling of stress and strain gradients. Based on the study of mesh convergence, the solutions with optimal accuracy were obtained on a mesh with 300 elements. This mesh was used for subsequent calculations of discretely heterogeneous materials with different wave propagation speeds in the media.

Verification of the numerical model. A discretely inhomogeneous beam was considered for the case, where $c_1 < c_2 < c_3$ ($c_3 = 2c_2$, $c_2 = 2c_1$). Material properties: $E_1 = 1$, $E_2 = 4$, $E_3 = 16$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$. Fig. 6 and 7 show the results of numerical modelling compared with the analytical results.

The numerical value of the error was determined based on the standard deviation between the analytical and numerical calculations:

$$\sigma_{\infty} = \frac{\sum_{i=1}^n |u_a(x_i) - u_n(x_i)|}{\max |u_a(x_i)|} \cdot 100, \quad (17)$$

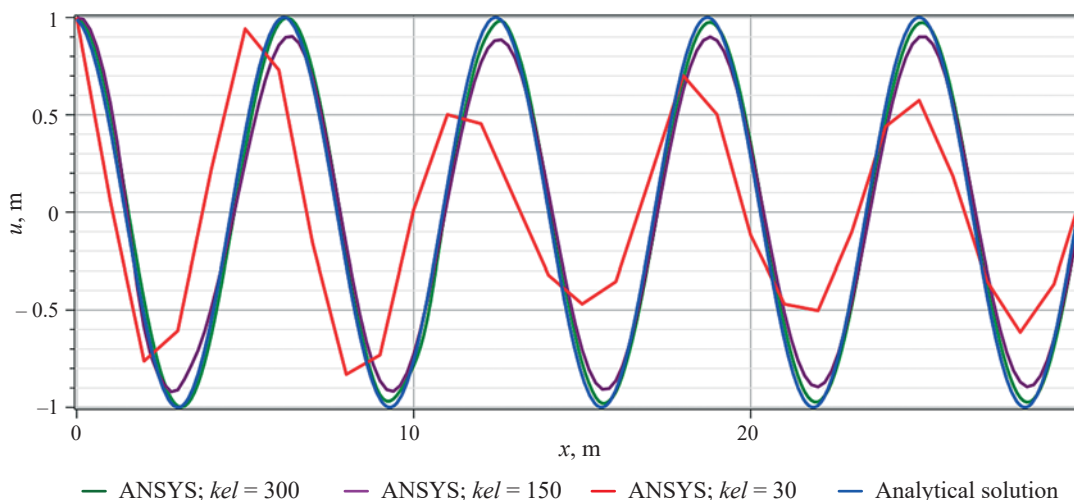


Fig. 5. Effect of mesh partitioning on the numerical solution for a homogeneous beam

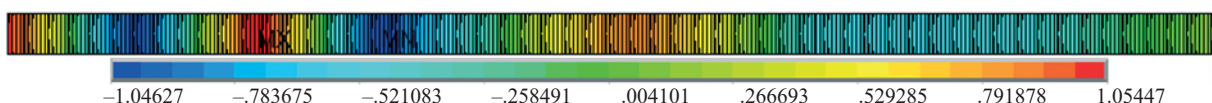


Fig. 6. Displacement amplitudes of a discretely inhomogeneous rod in steady-state vibration

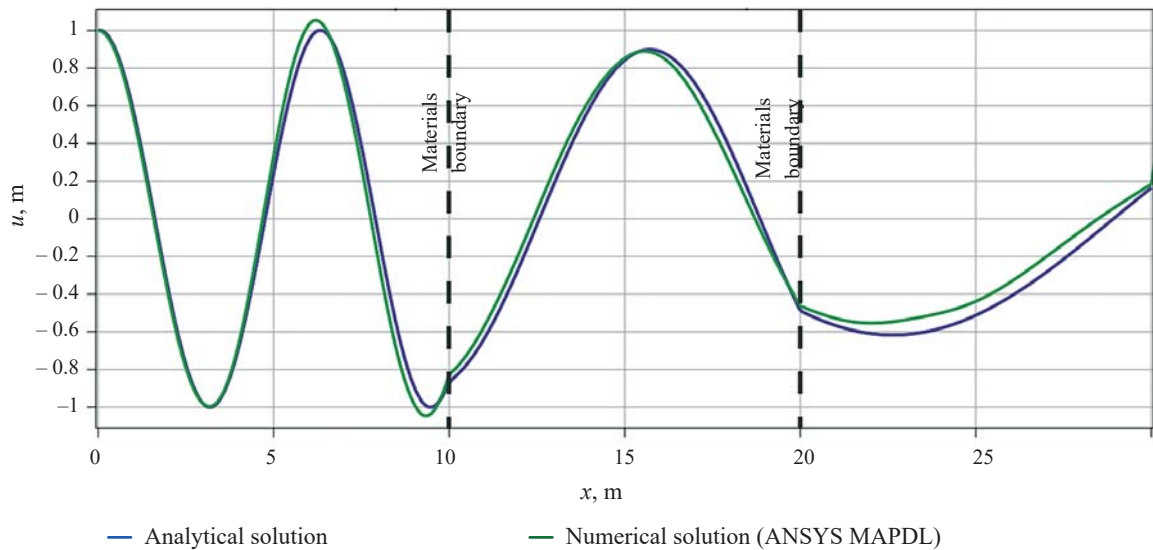


Fig. 7. Comparison of analytical and numerical solutions for a discretely inhomogeneous beam

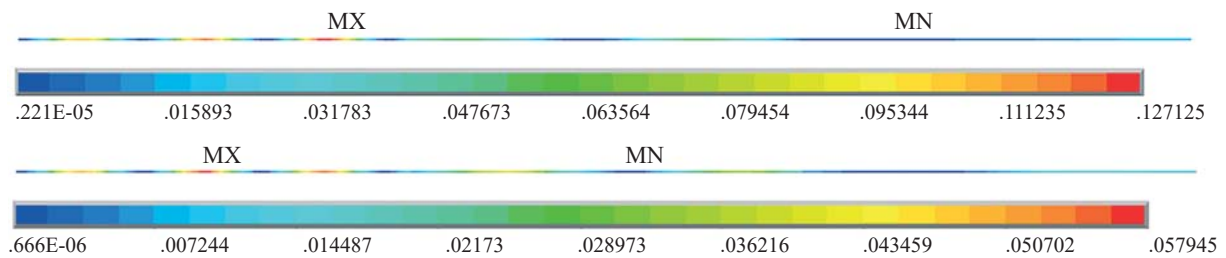


Fig. 8. Variation of specific kinetic energy (a) and potential energy (b) along the length of a discretely inhomogeneous rod

where $u_a(x)$, $u_n(x)$ — the analytical and numerical solutions at the point x , respectively.

The verification results show that numerical modelling in ANSYS Mechanical APDL allows for an adequate description (with an accuracy of up to 5 % at the point of greatest deviation) of the distribution of vibration amplitudes for a discretely inhomogeneous material.

Fig. 8 shows the values of kinetic energy and deformation energy at this particular moment in time, from which it can be seen that their distribution along the inhomogeneous rod is non-uniform. This is due to the inhomogeneity of the material and the frequency of the wave excitation. The energy maxima are concentrated in specific zones.

CONCLUSIONS AND DISCUSSION

Based on the study of the propagation of harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous linearly elastic rods, the following conclusions can be drawn:

1. A general analytical solution has been developed for a harmonic acoustic wave in a semi-infinite discretely inhomogeneous linearly elastic rod consisting of an arbitrary number of layers.

2. Based on the analytical solution developed, key patterns of the propagation of harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous linearly elastic rods have been established. It has been found that the discrete

inhomogeneity of the material significantly influences the amplitude-frequency characteristics and the distribution of vibrational energy, creating both zones of amplification and attenuation of dynamic effects.

3. It was shown that targeted modifications to the physical and geometric properties of the material (moduli of elasticity, density, segment lengths and number of layers) enable the generation of specified amplitude-frequency characteristics of wave fields.

4. A comparison of analytical solutions with the results of numerical modelling in ANSYS Mechanical APDL demonstrated good agreement between them. The average norm of the difference between the analytical and numerical calculations did not exceed 5 %. Detailed finite element calculations showed that, for the model under consideration, the finite element approximations converge to the analytical solution.

5. The results obtained open up broad prospects for engineering applications. By controlling the heterogeneity parameters, it is possible to design seismic barriers, waveguides and filters with predefined dynamic properties, thereby increasing the structures' resistance to vibration and seismic effects. Thus, the analytical solution developed and the proposed method for numerical modelling of the wave dynamics of discretely inhomogeneous rods can serve as a basis for further theoretical research and applied developments in the field of wave dynamics of inhomogeneous materials.

REFERENCES

1. Wu L., Wang Y., Chuang K., Wu F., Wang Q., Lin W. et al. A brief review of dynamic mechanical metamaterials for mechanical energy manipulation. *Materials Today*. 2021; 44:168-193. DOI: 10.1016/j.mattod.2020.10.006
2. Reismann H., Tsai L.W. Wave Propagation in Discretely Inhomogeneous Elastic Cylindrical Rods — A Comparison of Two Theories. *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1972; 52(1):1-10. DOI: 10.1002/zamm.19720520101
3. Brekhovskikh L.M. *Waves in Layered Media*. New York, Academic Press, 1980; 503.
4. Ewing M., Jardetzky W., Press F. *Elastic Waves in Layered Media*. New York, McGraw-Hill, 1957; 405.
5. Aki K., Richards P.G. *Quantitative Seismology. 2nd Ed.* University Science Books, 2002; 700.
6. Kuznetsov S.V. Love waves in stratified monoclinic media. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2004; 62(4):749-766. DOI: 10.1090/qam/2104272
7. Kayuk Y.F., Shekera M.K. On one dynamic problem for structurally inhomogeneous beams. *International Applied Mechanics*. 2007; 43(11):1256-1263. DOI: 10.1007/s10778-007-0129-0
8. Mazzei A.J., Scott R.A. Harmonic Forcing of Damped Non-homogeneous Elastic Rods. *Sensors and Instrumentation, Aircraft/Aerospace, Energy Harvesting & Dynamic Environments Testing*. 2025; 7:33-43. DOI: 10.1007/978-3-030-12676-6_3
9. Kuznetsov S.V. Acoustic waves in functionally graded rods with periodic longitudinal inhomogeneity. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023; 30(7):1410-1416. DOI: 10.1080/15376494.2022.2032888
10. Šalinić S., Obradović A., Tomović A. Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams. *Composites Part B: Engineering*. 2018; 150:135-143. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.05.060
11. Safari-Kahnaki A., Hosseini S.M., Tahani M. Thermal shock analysis and thermo-elastic stress waves in functionally graded thick hollow cylinders using analytical method. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 2011; 7(3):167-184. DOI: 10.1007/s10999-011-9157-3
12. Wu B., Su Y.P., Liu D.Y., Chen W.Q., Zhang C.Z. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders. *Journal of Sound and Vibration*. 2018; 412:17-47. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.01.055
13. Sajid N., Akram G. Solitary dynamics of longitudinal wave equation arises in magneto-electro-elastic circular rod. *Modern Physics Letters B*. 2021; 35(5):2150086. DOI: 10.1142/S021798492150086X
14. Keles İ., Aydın K. Practical Jointed Approach to Functionally Graded Structures. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2020; 12(2):57-69.
15. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers. *Acoustical Physics*. 2011; 57(3):420-426. DOI: 10.1134/S1063771011030109
16. Kuznetsov S.V. Acoustic black hole in a hyperelastic rod. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2023; 74(3). DOI: 10.1007/s00033-023-02020-x
17. Bratov V., Murachev A., Kuznetsov S.V. Utilization of a Genetic Algorithm to Identify Optimal Geometric Shapes for a Seismic Protective Barrier. *Mathematics*. 2024; 12(3):492. DOI: 10.3390/math12030492
18. Kuznetsov S.V., Saiyan S.G. Nonlinear acoustic waves in hyperelastic rods. *Mechanics of Solids*. 2025; 2:210-225. DOI: 10.31857/S1026351925020129. EDN ANREGK.(rus.)
19. Shemali A.A., Javkhan S., Kuznetsov S. Seismic protection from bulk and surface waves. *AIP Conference Proceedings*. 2023; 2759:030006. DOI: 10.1063/5.0103993
20. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 1912; 21:309-353.
21. Modestov K., Saiyan S., Erokhin A., Brygar O. Derivation of the one-dimensional radiation condition in elasticity theory by introducing infinitesimal viscosity. *E3S Web of Conferences*. 2023; 410:03025. DOI: 10.1051/e3sconf/202341003025
22. Butcher J. Runge-kutta methods. *Scholarpedia*. 2007; 2(9):3147. DOI: 10.4249/scholarpedia.3147
23. Carpenter M.H., Gottlieb D., Abarbanel S. Time-stable boundary conditions for finite-difference schemes solving hyperbolic systems: methodology and application to high-order compact schemes. *Journal of Computational Physics*. 1994; 111(2):220-236. DOI: 10.1006/jcph.1994.1057
24. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1947; 43(1):50-67. DOI: 10.1017/S0305004100023197
25. Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1959; 85(3):67-94. DOI: 10.1061/jmcea3.0000098
26. Hilber H.M., Hughes T.J. R., Taylor R.L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1977; 5(3):283-292. DOI: 10.1002/eqe.4290050306
27. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff

damping for seismic wave propagation in unbounded domains. *Computers and Geotechnics*. 2019; 109:69-81. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.01.019

28. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier. *European Journal of Environmental*

and Civil Engineering. 2020; 24(14):2400-2421. DOI: 10.1080/19648189.2018.1506826

29. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers. *Computers and Geotechnics*. 2021; 131:103808. DOI: 10.1016/j.compgeo.2020.103808

Received November 13, 2025.

Adopted in revised form on December 13, 2025.

Approved for publication on December 30, 2025.

B I O N O T E S: **Sergey G. Saiyan** — Candidate of Technical Sciences, research fellow at the A.B. Zolotov Scientific and Educational Center for Computer Modeling of Unique Buildings, Structures, and Complexes, senior lecturer at the Department of Structural and Theoretical Mechanics, lecturer at the Department of Computer Science and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; junior research fellow; **Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS)**; build. 1, 101 Vernadsky ave., Moscow, 119526, Russian Federation; SPIN-code: 3337-7862, ID RSCI: 987238, Scopus: 57195230884, ResearcherID: AAT-1424-2021, ORCID: 0000-0003-0694-4865; berformert@gmail.com.