

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 69.07:624.04

DOI: 10.22227/2305-5502.2026.2.7

Исследование прочности и деформативности быстросборного контактного узла примыкания балки к колонне

Иван Владимирович Мыльников, Валентина Матвеевна Туснина

Национальный исследовательский Московский государственный
строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Рассматривается быстросборный контактный узел примыкания балки к колонне по системе «ласточкин хвост». При монтаже балка устанавливается опорными ребрами в гнезда, изготовленные и приваренные к колонне в заводских условиях. Фиксация ригеля от продольного перемещения обеспечивается заполнением монтажных зазоров доборными пластинами. Данное решение позволяет просто и надежно соединять ригель двутаврового сечения с колонной из квадратного гнутосварного профиля.

Материалы и методы. При определении предельного изгибающего момента M_{lim} и коэффициента защемления балки в узле С использовался кинематический метод предельного равновесия. Полагая, что пластические деформации могут значительно превзойти упругие, принималась диаграмма работы стали как для жесткопластического тела. Также предполагалось, что линии излома гнездовых пластин являются линейными пластическими шарнирами, вдоль которых действуют только моментные векторы; пластины принимались жестко защемленными по двум смежным краям и свободными от закреплений по двум другим смежным краям.

Результаты. Построена фактическая эпюра моментов для упруго защемленной по концам балки, нагруженной двумя сосредоточенными силами, симметрично расположенными от опор; получена формула для определения угла поворота на опорах φ .

Выводы. В ходе сравнительного анализа выявлено, что при использовании в опорном гнезде пластин толщиной 5 мм узел работает практически как шарнирный; при использовании пластин толщиной 10 мм — как полужесткий. Предложенный контактный узел примыкания балки к колонне может рекомендоваться к применению в проектировании.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стальной каркас, контактные соединения, податливый узел, метод предельного равновесия, жесткость, опорный момент, угол поворота

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Мыльников И.В., Туснина В.М. Исследование прочности и деформативности быстросборного контактного узла примыкания балки к колонне // Строительство: наука и образование. 2026. Т. 16. Вып. 2. Ст. 7. URL: <http://inso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.2.7

Автор, ответственный за переписку: Иван Владимирович Мыльников, miv_2499@mail.ru.

Investigation of the strength and deformability of a quick- assembly contact beam-to-column joint

Ivan V. Mylnikov, Valentina M. Tushina

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. A quick-assembly contact beam-to-column joint based on the dovetail system is considered in the article. During installation, the beam is seated by its support ribs in sockets manufactured and welded to the column under factory conditions. Longitudinal displacement of the girder is prevented by filling the erection gaps with shim plates. This solution provides a simple and reliable connection between an I-section girder and a column made of a square cold-formed welded hollow section.

Materials and methods. The kinematic method of limit equilibrium was used to determine the limiting bending moment M_{lim} and the beam fixity coefficient C in the joint. Assuming that plastic deformations can significantly exceed elastic deformations, the steel stress-strain diagram was idealized as that of a rigid-plastic body. It was also assumed that the yield lines of the socket plates are linear plastic hinges along which only moment vectors act; the plates were considered rigidly fixed along two adjacent edges and free along the other two adjacent edges.

Results. The actual bending-moment diagram was constructed for a beam elastically restrained at both ends and loaded by two concentrated forces arranged symmetrically with respect to the supports; a formula was obtained for determining the support rotation angle φ .

Conclusions. The comparative analysis showed that when 5 mm thick plates are used in the support socket, the joint behaves almost as a hinge; when 10 mm thick plates are used, it behaves as a semi-rigid joint. The proposed contact beam-to-column joint can be recommended for use in design practice.

KEYWORDS: steel frame, contact joints, compliant joint, limit equilibrium method, stiffness, support moment, rotation angle

FOR CITATION: Mylnikov I.V., Tushina V.M. Investigation of the strength and deformability of a quick-assembly contact beam-to-column joint. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2026; 16(2):7. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2026.2.7

Corresponding author: Ivan V. Mylnikov, miv_2499@mail.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Стальной каркас многоэтажного здания, выполненный по связевой конструктивной схеме, хорошо отвечает принципу концентрации материала и отличается от рамного и рамно-связевого каркасов простотой сопряжения ригелей с колоннами и меньшей трудоемкостью возведения. Узлы «балка – колонна» в расчетах таких каркасов теоретически принимаются шарнирными, однако на практике, как показывают исследования их действительной работы, они обладают определенной жесткостью, зависящей от их конструктивного решения.

В НИУ МГСУ разработан быстросборный контактный узел примыкания балки к колонне без применения сварочных и болтовых работ на строительной площадке. Устройство такого узла заключается в установке балки в специальные детали — гнезда, приваренные к колонне в заводских условиях. В таком сопряжении балки с колонной передача усилий происходит за счет контактного взаимодействия опорных деталей узла, работающих по системе «ласточкин хвост».

Современные возможности металлообработки позволяют легко изготовить конструктивные элементы каркаса с такими закладными деталями, что будет способствовать быстрому и простому монтажу

стального каркаса, существенно сократив сроки возведения здания [1–3].

Настоящее исследование посвящено изучению действительной работы быстросборного контактного узла примыкания балки к колонне, устроенного по типу «ласточкин хвост», в стальном каркасе многоэтажного здания.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Постановка задачи

Рассмотрим быстросборный узел примыкания балки к колонне по системе «ласточкин хвост». Сечение балки — прокатный двутавр 20Б1, опорное ребро $150 \times 100 \times 10$ мм; сечение колонны — квадратный гнутосварной профиль 200×8 мм, опорное гнездо $190 \times 160 \times 20$ мм, размеры посадочного паза $140 \times 105 \times 15$ мм (рис. 1–3). Балка опорными ребрами устанавливается в гнезда, приваренные к двум колоннам. Материал — сталь С345К.

В рассмотренном соединении присутствуют два зазора: Δ_1 — между стенкой колонны и опорным ребром и Δ_2 — между опорным ребром и пластинами опорного гнезда (рис. 4). Зазор Δ_1 плотно заполняется по месту доборными пластинами для предотвращения продольного смещения балки. Величина оставшегося зазора Δ_2 мала [4–7].

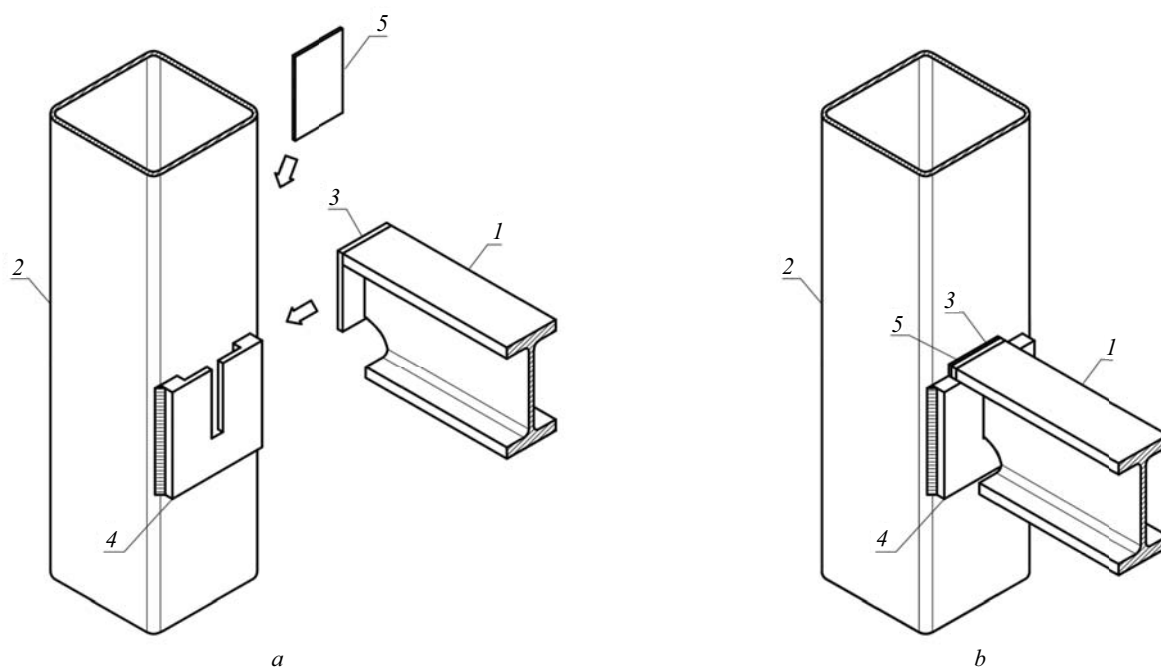


Рис. 1. Схема сборки узла примыкания балки к колонне по системе «ласточкин хвост»: а — в разобранном виде; б — в собранном виде; 1 — балка; 2 — колонна; 3 — опорное ребро; 4 — опорное гнездо; 5 — доборная пластина

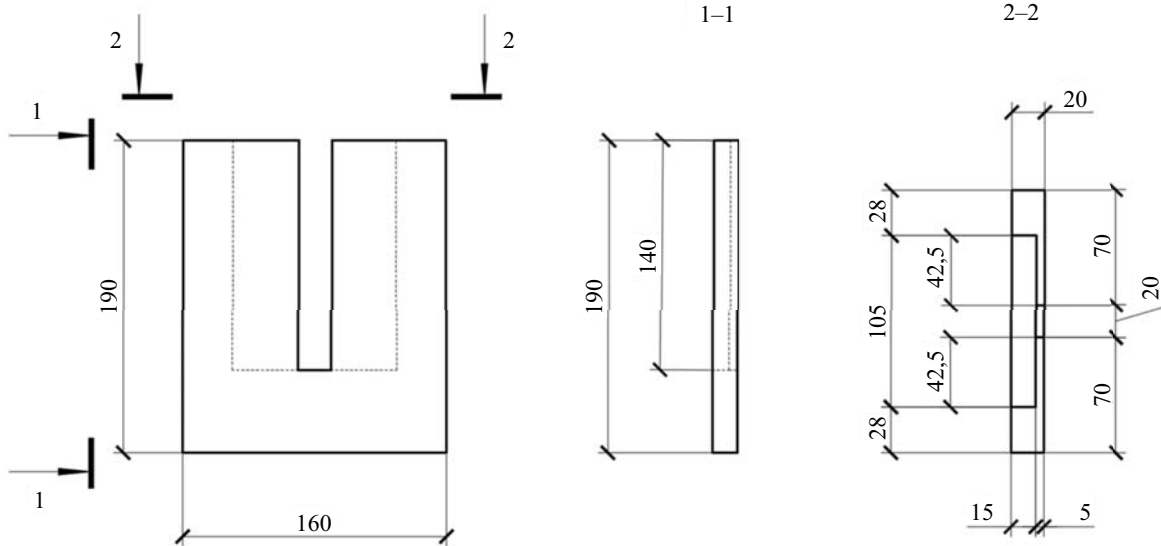


Рис. 2. Размеры опорного гнезда, привариваемого к колонне

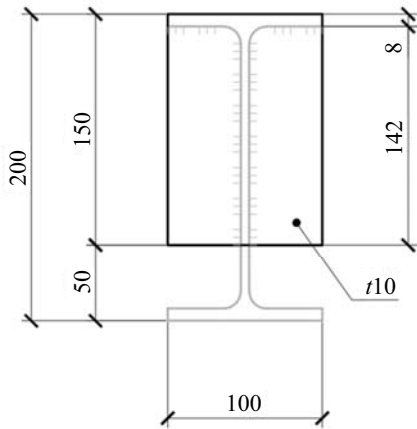


Рис. 3. Размеры опорного ребра, привариваемого к балке

Предполагаем, что зазор Δ_1 заполнен полностью, а зазор Δ_2 равен нулю (случай абсолютно плотной посадки). Таким образом, при действии на балку поперечной нагрузки на опорах будет возникать изгибающий момент некоторой величины M , которая будет зависеть от податливости соединения C .

При действии поперечной нагрузки на балку возникает изгибающий момент M , деформируются опорное ребро балки и пластины опорного гнезда, которые препятствуют его повороту. Происходят горизонтальное перемещение Δ и угол поворота φ в плоскости стенки балки вокруг точки O , что провоцирует возникновение значительных касательных напряжений в зоне заделки ограничивающего листа к опорному гнезду [8–10].

Необходимо определить для данного соединения:

- 1) предельный изгибающий момент M_{lim} ;
- 2) угол поворота опорного сечения балки φ ;
- 3) коэффициент защемления балки C и фактическое распределение изгибающего момента M в балке.

Для решения будем использовать кинематический метод теории предельного равновесия, который формулируется следующим образом: для заданной статически неопределимой системы при действии заданного вида нагрузки величина предельной нагрузки $P_{пр}$, соответствующая распределению изгибающих моментов для какого-либо возможного механизма разрушения, всегда больше действительной разрушающей нагрузки или равна ей (или иначе: из всех форм разрушения истинна та, которой соответствует наименьшая предельная нагрузка $P_{пр}$) [11].

Согласно этому методу надо из всех возможных механизмов разрушения с одной степенью свободы записать уравнение равновесия в форме работ (принцип Лагранжа) на тех перемещениях, которые возможны для данного механизма. При этом возможная работа внешних сил считается положительной и равна произведению силы $P_{i,пр}$ на соответствующее линейное перемещение Δ_i , а возможная работа внутренних сил, т.е. предельных изгибающих моментов $M_{j,пр}$, возникающих в пластических шарнирах, — отрицательной и равной произведению $M_{j,пр}$ на угол поворота θ_j , характеризующий возможную деформацию в j -м шарнире:

$$\sum_i P_{i,пр} \Delta_i = \sum_j M_{j,пр} \theta_j.$$

При решении будем использовать диаграмму жесткопластического тела (рис. 5), согласно которой полагается, что до развития пластического течения материал остается абсолютно недеформируемым. Такая модель достаточно характеризует действительную работу конструкции при отсутствии факторов, сдерживающих развитие деформаций в пластической области. Так как пластические деформации могут значительно превзойти упругие, то оправданно использование схемы жесткопластического тела.

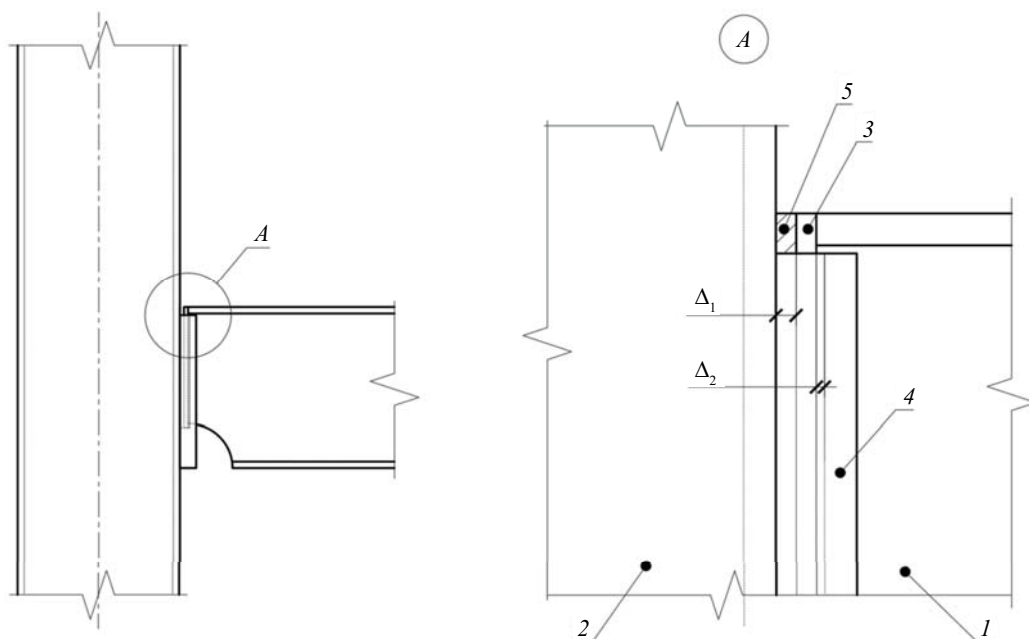


Рис. 4. Зазоры в узле: 1 — балка; 2 — колонна; 3 — опорное ребро; 4 — опорное гнездо; 5 — доборная пластина

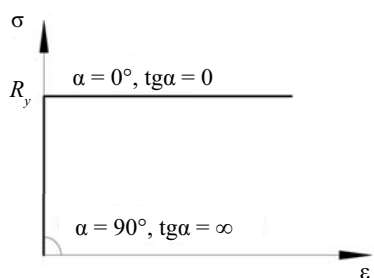


Рис. 5. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ для жесткопластического тела

Схема кинематического механизма узла показана на рис. 6.

В расчете опорное гнездо представляем в виде двух пластин, прикрепленных к жесткому телу и подвергнутых изгибу из плоскости. Рассматриваемый

кинематический механизм узла предполагает следующие допущения:

1. Линии излома являются линейными пластическими шарнирами, вдоль которых действуют только моментные векторы.
2. Пластина считается жестко защемленной по двум смежным краям и свободной от закреплений по двум другим смежным краям.

Определение предельного изгибающего момента M_{lim}

Рассмотрим кинематически возможное состояние опорного гнезда при изгибе балки. На рис. 7 отрезок AB соответствует линейному пластическому шарниру, длина которого равна:

$$AB = l = \sqrt{b^2 + h^2}.$$

Угол поворота φ в плоскости стенки балки равен:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{h}.$$

Пренебрегая вертикальным смещением, при поперечном изгибе пластины точка C перемещается горизонтально в точку C' . Двугранный угол $CABC'$ равен:

$$\angle CABC' = \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta}{x} = \frac{\Delta \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}.$$

Для двух пластин работа внутренних сил будет определяться выражением:

$$U = 2 \int_0^l M_{пл} \theta dL \approx 2 M_{пл} \sum \theta_i l_i,$$

где $M_{пл} = R_y W_{пл} = \sigma_y t^2/4$ — единичный предельный изгибающий момент, при котором наступает текучесть; R_y — расчетное сопротивление стали по пределу те-

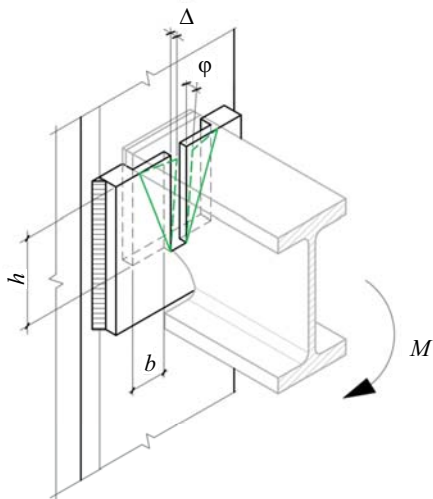


Рис. 6. Схема кинематического механизма узла

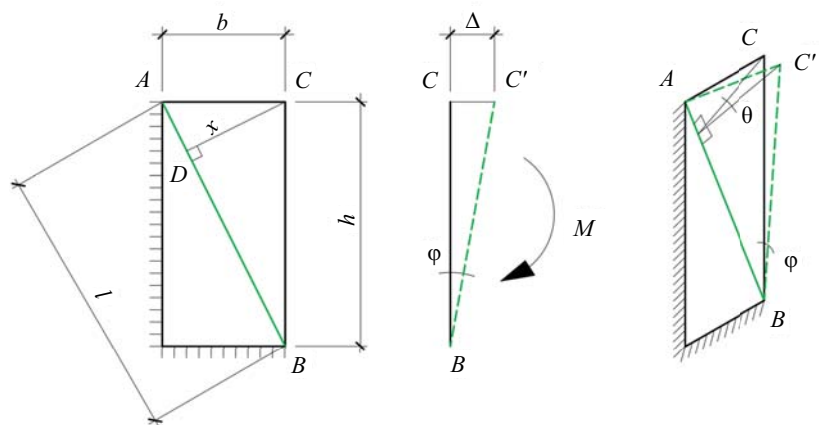


Рис. 7. Схема пластического шарнира в узле для одной из двух пластин опорного гнезда

кучести; t — толщина пластины; l — длина линейного пластического шарнира; θ_i и l_i — элементарный угол перелома и соответствующая ему элементарная длина линейного шарнира.

Тогда выражение для работы внутренних сил пластины принимает вид:

$$\begin{aligned} U &= 2 \frac{R_y t^2}{4} \cdot \frac{\Delta \sqrt{b^2 + h^2}}{bh} \cdot \sqrt{b^2 + h^2} = \\ &= 2 \frac{R_y t^2}{4} \cdot \frac{\Delta}{bh} \cdot (b^2 + h^2) = \\ &= \frac{R_y t^2}{2} \cdot \frac{\Delta}{h} \cdot \frac{b^2 + h^2}{h}. \end{aligned}$$

Выражение работы внешних сил равно:

$$A = M\varphi = M\frac{\Delta}{h}.$$

Приравнивая выражения работ внешних и внутренних сил, получим:

$$M \frac{\Delta}{h} = \frac{R_y t^2}{2} \cdot \frac{\Delta}{h} \cdot \frac{b^2 + h^2}{h},$$

откуда можно определить предельный изгибающий момент, воспринимаемый опорным узлом:

$$M_{lim} = \frac{R_y t^2}{2} \cdot \frac{b^2 + h^2}{b}.$$

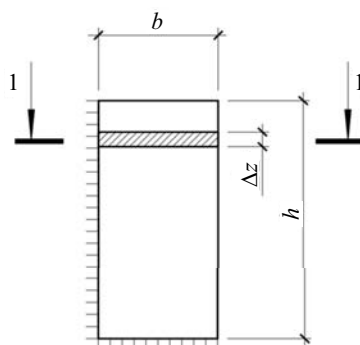


Рис. 8. Расчетная схема пластины

Определение коэффициента заземления балки C

Для определения жесткости узла C рассмотрим элементарную горизонтальную консольную полосу пластины шириной Δz (рис. 8).

Горизонтальная реакция от перемещения свободного края будет равна:

$$R = \frac{3EJ}{h^3} \cdot y = \frac{E \cdot \Delta z \cdot t^3}{4h^3} \cdot y,$$

где E — модуль упругости стали; $J = \Delta z \cdot t^3/12$ — момент инерции элементарной полосы; b и t — ширина и толщина пластины

Угол поворота пластины в заделке является переменной величиной и определяется следующим образом (рис. 9):

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma \approx y/z,$$

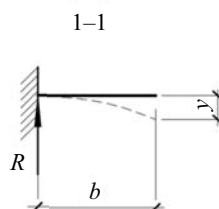
откуда

$$y = \gamma \cdot z.$$

Тогда:

$$R = \frac{E \cdot \Delta z \cdot t^3}{4b^3} \cdot \gamma \cdot z.$$

Предположив для простоты, что полосы шириной Δz не связаны между собой, можно записать выражение для удельного изгибающего момента $\overline{M}$,



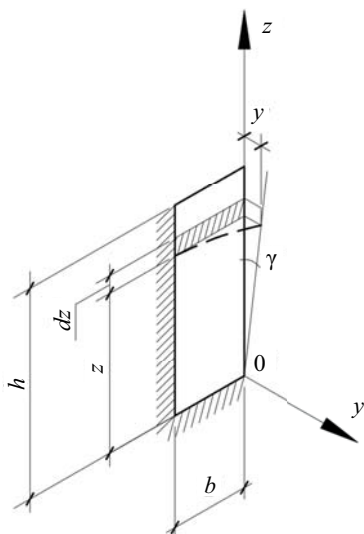


Рис. 9. Схема деформации пластины

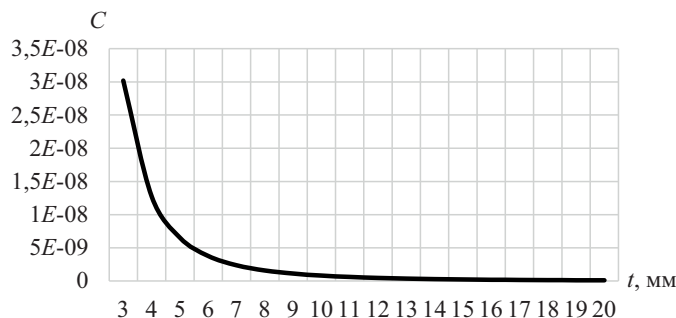
соответствующего повороту опорного сечения балки на единичный угол в узле:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \frac{M}{\gamma} = 2 \int_0^h \frac{R z dz}{\gamma \Delta z} = \\ &= 2 \int_0^h \left(\frac{E \cdot \Delta z \cdot t^3}{4b^3} \cdot \gamma \cdot z \right) \frac{z dz}{\gamma \Delta z} = \\ &= \frac{2E \cdot t^3}{4b^3} \int_0^h z^2 dz = \frac{E}{2} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{E}{6} \left(\frac{t \cdot h}{b} \right)^3.\end{aligned}$$

Коэффициент защемления балки — это величина, обратная удельному изгибающему моменту, соответствующему повороту опорного сечения балки на единичный угол. Следовательно, выражение для коэффициента защемления балки выглядит так:

$$C = \frac{1}{\bar{M}} = \frac{6}{E} \left(\frac{b}{t \cdot h} \right)^3.$$

На рис. 10 показана зависимость коэффициента защемления балки C от толщины пластин t (параметры b и h приняты постоянными). Графиком является кубическая гипербола.

Рис. 10. График зависимости коэффициента защемления балки C от толщины пластин t

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Определение опорных моментов в ригелях и углов поворота их опорных сечений

Для определения опорных моментов в балке и углов поворота ее опорных сечений в качестве расчетной схемы примем балку ступенчатой жесткости, упруго защемленную на опорах и нагруженную двумя сосредоточенными силами $P/2$ на расстоянии d от края балки (рис. 11). При этом будем полагать, что влияние жесткости колонн несущественно.

Длина m , обозначенная на рис. 11, равна толщине ограничивающего «лепестка» опорного гнезда, т.е. $m = t$.

Степень статической неопределимости заданной системы равна 1. Определим опорный момент в ригеле при помощи метода сил. Основная система представляет собой классическую шарнирно опертую балку (рис. 12, а), где в качестве симметричного неизвестного X_1 принят изгибающий момент на опорах. Каноническое уравнение метода сил запишется в виде:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + \varphi = 0.$$

Левая часть уравнения описывает суммарный угол поворота опоры, где φ — часть этого угла, зависящая от коэффициента защемления c , определенного выше: $\varphi = c \cdot X_1$.

Тогда каноническое уравнение метода сил примет вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + C \cdot X_1 = 0.$$

Единичная эпюра $\bar{M}_1$ и грузовая эпюра M_P представлены на рис. 12, б и 12, с.

Коэффициенты δ_{11} и Δ_{1P} определяются по формуле Максвелла – Мора с использованием правила Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = 2 \frac{m \cdot 1 \cdot 1}{EJ'} + \frac{(l - 2m) \cdot 1 \cdot 1}{EJ};$$

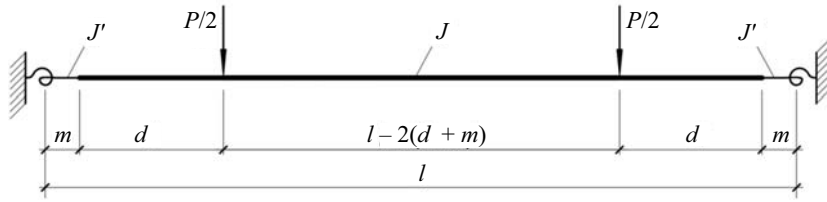


Рис. 11. Расчетная схема балки ступенчатой жесткости, упруго защемленной на опорах

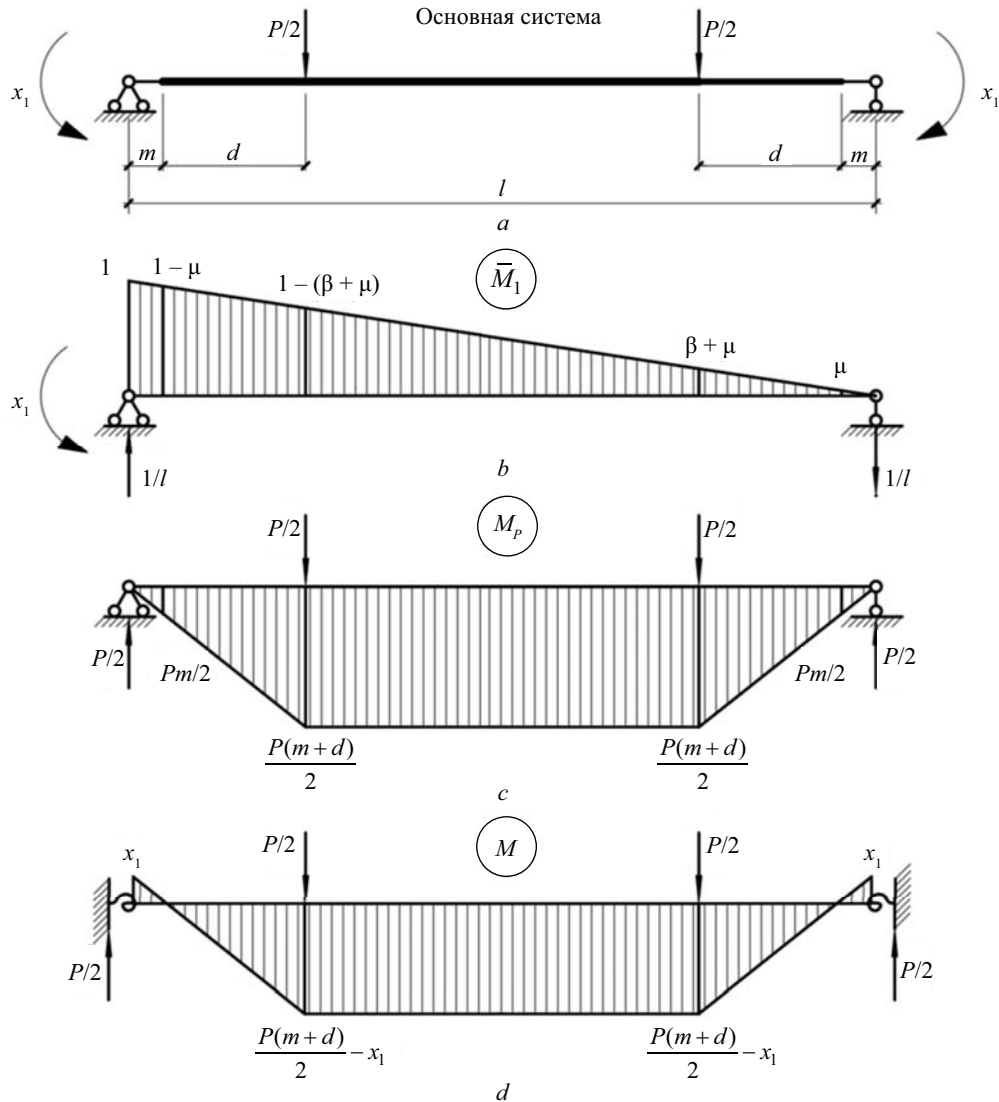


Рис. 12. К расчету балки методом сил: а — основная система; b — единичная эпюра $\bar{M}_1$; c — грузовая эпюра M_p ; d — окончательная эпюра моментов M

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_1}{EJ} dx = -\frac{P(m+d)}{4EJ} (l - 2(m+d)) \cdot 1 -$$

$$- \left[\frac{P(m+d)}{2} + \frac{Pm}{2} \right] \cdot d \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Pm}{2} \cdot \frac{m}{EJ'}.$$

Если принять, что:

$$J' = \alpha \cdot J; \quad m = \mu \cdot l; \quad d = \beta \cdot l,$$

то выражения для δ_{11} и Δ_{1P} можно переписать:

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EJ} \left[1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right];$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pl^2}{4EJ} \left[\mu \left(1 - 2\mu + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - 2\mu - \beta) \right].$$

Определим неизвестное X_1 :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + C'};$$

$$X_1 = \frac{\frac{Pl^2}{4EJ} \left[\mu \left(1 - 2\mu + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - 2\mu - \beta) \right]}{\frac{l}{3EJ} \left[1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right] + \frac{6}{E} \left(\frac{b}{t \cdot h} \right)^3}.$$

Упростив полученное выражение и пренебрегая компонентом μ ввиду его малой величины по сравнению с единицей, можно записать:

$$X_1 = \frac{Pl \left[\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - \beta) \right]}{\frac{4}{3} + 4\mu \left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{4}{3}\beta \right) + 24 \cdot \frac{J}{l} \left(\frac{b}{t \cdot h} \right)^3}.$$

Учитывая, что $2 \frac{th^3}{12} = \alpha \cdot J$, J можно записать окончательную формулу для определения опорного момента в балке с узлами по системе «ласточкин хвост»:

$$M_{оп} = \frac{Pl \left[\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - \beta) \right]}{\frac{4}{3} + 4\mu \left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{4}{3}\beta \right) + \frac{4b}{\alpha \cdot l} \left(\frac{b}{t} \right)^2}.$$

Наибольший изгибающий момент в пролете для двухточечной схемы изгиба равен:

$$M_{пр} = \frac{P(t+d)}{2} - \frac{Pl \left[\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - \beta) \right]}{\frac{4}{3} + 4\mu \left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{4}{3}\beta \right) + \frac{4b}{\alpha \cdot l} \left(\frac{b}{t} \right)^2}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 12, d.

Угол поворота балки на опоре, зависящий от упругих свойств конструкции узла, можно определить следующим образом:

$$\varphi = C \cdot X_1; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + C};$$

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\Delta_{1P}}{\frac{\delta_{11}}{C} + 1} = \\ &= \frac{\frac{Pl^2}{4EJ} \left[\mu \left(1 - 2\mu + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - 2\mu - \beta) \right]}{\frac{l}{3EJ} \left[1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right] + 1 + \frac{6}{E} \left(\frac{b}{t \cdot h} \right)^3} = \\ &= \frac{Pl^2}{4EJ} \cdot \frac{\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - \beta)}{1 + \frac{\alpha t^2 l}{3b^3} \cdot \left(1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right)}. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения, можно сравнить работу балки, упруго защемленной по концам, с классическими вариантами: с шарнирно опертой балкой и с балкой, жестко защемленной по концам [12–15]. В таблице приводятся значения изгибающих моментов и углов поворотов опорных сечений для разных расчетных случаев [16–20]. Рассматриваются пролеты балок 3, 4,5 и 6 м; две сосредоточенные силы прикладываются на расстоянии $a = l/4$ от опор. Для упруго защемленной балки определены значения моментов и углов поворота при $b = 42,5$ мм, $h = 140$ мм, $t = 5$; 10 мм. Сечение балки — прокатный

Значения изгибающих моментов и углов поворота опорных сечений для разных вариантов расчетных схем

Номер	Расчетная схема и эпюра моментов	Пролет l , м	Отступ a , м	Опорный момент $M_{оп}$, кН·м	Пролетный момент $M_{пр}$, кН·м	Угол поворота на опоре $\varphi_{оп}$, рад.	Примечание
1		3,0	0,75	0	75	0,0222 ($\varphi_{оп}^{ш}$)	—
2		4,5	1,125	0	112,5	0,05 ($\varphi_{оп}^{ш}$)	—
3		6,0	1,5	0	150	0,0888 ($\varphi_{оп}^{ш}$)	—
4		3,0	0,75	3,27	71,73	0,0213	$M_{оп}^с = 8,73 \% M_{оп}^с$ $\varphi_{оп}^с = 96,12 \% \varphi_{оп}^{ш}$
5		4,5	1,125	7,23	105,27	0,0471	$M_{оп}^с = 12,85 \% M_{оп}^с$ $\varphi_{оп}^с = 94,29 \% \varphi_{оп}^{ш}$
6		6,0	1,5	12,61	137,39	0,0822	$M_{оп}^с = 16,81 \% M_{оп}^с$ $\varphi_{оп}^с = 92,53 \% \varphi_{оп}^{ш}$

Окончание табл.

Номер	Расчетная схема и эпюра моментов	Пролет <i>l</i> , м	Отступ <i>a</i> , м	Опорный момент <i>M</i> _{оп} , кН·м	Пролетный момент <i>M</i> _{пр} , кН·м	Угол поворота на опоре $\varphi_{оп}$, рад.	Примечание
7		3,0	0,75	20,60	54,40	0,0168	$M_{оп}^e = 54,94 \% M_{оп}^s$ $\varphi_{оп}^e = 75,58 \% \varphi_{оп}^s$
8		4,5	1,125	41,31	71,19	0,0337	$M_{оп}^e = 73,44 \% M_{оп}^s$ $\varphi_{оп}^e = 67,36 \% \varphi_{оп}^s$
9		6,0	1,5	66,23	83,77	0,0540	$M_{оп}^e = 88,31 \% M_{оп}^s$ $\varphi_{оп}^e = 60,75 \% \varphi_{оп}^s$
10		3,0	0,75	37,5 ($M_{оп}^s$)	37,5	0	—
11		4,5	1,125	56,25 ($M_{оп}^s$)	56,25	0	—
12		6,0	1,5	75 ($M_{оп}^s$)	75	0	—

Примечание: $M_{оп}^s$ и $M_{оп}^e$ — опорные моменты, возникающие в балке, защемленной жестко или упруго соответственно; $\varphi_{оп}^s$ и $\varphi_{оп}^e$ — углы поворота на опорах, возникающие в балке, шарнирно опертой или упруго защемленной соответственно.

двутавр 20Б1 по ГОСТ Р 57837–2017. Значение силы *P* принято равным 200 кН.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе кинематического метода теории предельного равновесия получены выражения для определения предельного изгибающего момента *M_{lim}* и коэффициента защемления балки *C* для конструкции контактного узла примыкания балки к колонне, работающего по системе «ласточкин хвост».

Используя метод сил, построена фактическая эпюра моментов для упруго защемленной по концам балки, загруженной двумя сосредоточенными силами, симметрично расположенными от опор.

Получена формула для определения угла поворота опорного сечения балки φ для конструкции контактного узла примыкания балки к колонне по типу «ласточкин хвост».

На основании произведенного сравнения с классическими вариантами опирания балки (с шарнирами и жесткими заделками на концах) было определено, что рассматриваемый узел с толщиной гнездовых пластин *t* = 5 мм является практически полностью шарнирным. В этом случае происходит значительный угол поворота на опоре, который для пролета *l* = 3 м составляет 96,12 % от угла поворота на опоре для шарнирной схемы, для пролета *l* = 4,5 м — 94,29 %, а для пролета *l* = 6 м — 92,53 %. Возникающие в схеме с упругими заделками опорные изгибающие моменты для пролета

l = 3 м составляют 8,73 % от схемы с жесткими заделками, для пролета *l* = 4,5 м — 12,85 %, а для пролета *l* = 6 м — 16,81 %. Таким образом, для выполнения инженерных расчетов можно считать, что при использовании податливого узла при толщине ограничивающих *t* = 5 мм соотношение между опорным и пролетным моментами составляет 1:10.

Для варианта, когда толщина гнездовых пластин принимается равной *t* = 10 мм, жесткость узла увеличивается. В этом случае возникает угол поворота на опоре, составляющий для пролета *l* = 3 м 75,58 % от угла поворота на опоре для шарнирной схемы, для пролета *l* = 4,5 м — 67,36 %, а для пролета *l* = 6 м — 60,75 %. Действующие в схеме с упругими заделками балки опорные изгибающие моменты для пролета *l* = 3 м составляют 54,94 % от схемы с жесткими заделками, для пролета *l* = 4,5 м — 73,44 %, а для пролета *l* = 6 м — 88,31 %. Следовательно, использование таких ограничивающих листов позволяет считать заделки балки полужесткими и способствует уменьшению пролетных моментов; однако следует заметить, что это повышает металлоемкость узла.

Исследуемый быстросборный узел дает возможность ускорить процесс монтажа элементов стального каркаса на строительной площадке, а определенные выше характеристики позволяют учитывать действительную работу узла при выполнении расчетов. Предложенный контактный узел примыкания балки к колонне может рекомендоваться к применению в инженерной практике.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Kukla D., Kozłowski A., Ślęczka L., Wójcik-Grząba I., Nykiel D., Gubernat S. Innovative steel beam-to-column joint under central column loss situation: Experimental tests and analytical model // *Engineering Structures*. 2025. Vol. 326. P. 119513. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.119513. EDN DXUCZE.
2. Zhang Z.W., Li D., Wang H.J., Qian H.L., Fang W.Q., Jing X.F. et al. Study of mechanical properties of a novel column-beam-column prefabricated steel frame joint // *Advanced Steel Construction*. 2024. Vol. 20. Issue 4. Pp. 330–344. DOI: 10.18057/ijasc.2024.20.4.2
3. Shi G., Liu M., Luo J., Zhao H. Experimental study on the seismic behavior of steel joints between I-beam and box-T built-up section columns // *Thin-Walled Structures*. 2025. Vol. 216. P. 113626. DOI: 10.1016/j.tws.2025.113626. EDN SEAQTN.
4. Сунь Г., Миронова Л.И. Влияние изгибной жесткости соединения на работоспособность стального каркаса // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2025. Т. 21. № 6. С. 537–550. DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-6-537-550. EDN FOHZXB.
5. Jakovljević I., Dobrić J., Gluhović N., Spremić M. Beam-to-column joint solutions for reusable moment-resisting steel frames // *Journal of Constructional Steel Research*. 2026. Vol. 238. P. 110163. DOI: 10.1016/j.jcsr.2025.110163. EDN AWZYWD.
6. Elhout E.A. Effect of beam-column connection types on the response modification factors of steel frames // *International Journal of Steel Structures*. 2024. Vol. 24. Issue 1. Pp. 132–143. DOI: 10.1007/s13296-023-00805-4. EDN QJSLTJ.
7. Piskulic M., Vujanac R., Vulović S., Miloradovic N., Blagojevic M., Djordjevic Z. Structural Performance of Semi-Rigid Beam-to-Column Connections in Steel Storage Racks: A Review Focused on FEM Analysis // *Metals*. 2026. Vol. 16. Issue 1. P. 2. DOI: 10.3390/met1601-0002. EDN ZOHPCX.
8. Туснина В.М. Несущая способность и деформативность податливых узлов стальных каркасов многоэтажных зданий : дис. ... канд. техн. наук. М., 1989. 166 с.
9. Ferdous W. Effect of beam-column joint stiffness on the design of beams // *23rd Australian Conference on the Mechanics of Structures and Materials*. 2014. Pp. 701–706.
10. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 5 (73). Pp. 25–39. DOI: 10.18720/MCE.73.3. EDN ZNLKNH.
11. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. II. Статически неопределимые системы : учебное пособие. 4-е изд., доп. и перераб. М. : Издательство АСВ, 2017. 464 с.
12. Глебов Ф.А., Астахов И.В., Корсун В.И., Кондратьева Л.Н., Цыгановкин В. Аналитическая модель метода переменных параметров упругости для расчета фланцевых соединений двутавровой балки с колонной // *Инженерный вестник Дона*. 2024. № 1 (109). С. 462–496. EDN QHDFKI.
13. Nie R., Li Y., Bai Y., Mou B., Zhou Ya. HSS steel corner column to H-beam joints under cyclic bidirectional loadings: Experiment, numerical modeling, and calculation // *Journal of Constructional Steel Research*. 2022. Vol. 192. P. 107239. DOI: 10.1016/j.jcsr.2022.107239. EDN PUAQCH.
14. Lian Ju.Yi., Deng En.F., He J.M., Cai Li.M., Gao Sh.C., Zhou Ji.J. Numerical analysis on seismic performance of corner fitting connection in modular steel building // *Structures*. 2021. Vol. 33. Pp. 1659–1676. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.05.044. EDN ZHINRZ.
15. Celik H., Şakar G. Semi-rigid connections in steel structures: State-of-the-art report on modelling, analysis and design // *Structural Engineering and Mechanics*. 2022. Vol. 45. Issue 1.
16. Yin T., Wang Zh., Zheng K., Lu Sh. A new method for design of the semi-rigid steel frame — the integration of joint inverse design and structural design // *Buildings*. 2022. Vol. 12. Issue 7. P. 938. DOI: 10.3390/buildings12070938. EDN MRTYXE.
17. Rodríguez González C.A., Caparrós-Manceira Ju.J., Hernández-Torres J.A., Rodríguez-Pérez Á.M. Nonlinear analysis of rotational springs to model semi-rigid frames // *Entropy*. 2022. Vol. 24. Issue 7. P. 953. DOI: 10.3390/e24070953. EDN FFTQGF.
18. Al-Sherif R.H., Ismael M.A. Effect of semi-rigid beam-column connection on structural behavior of steel frames // *AIP Conference Proceedings*. 2023. Vol. 2784. P. 020008. DOI: 10.1063/5.0140815
19. Elhout E.A. Effect of beam-column connection types on the response modification factors of steel frames // *International Journal of Steel Structures*. 2024. Vol. 24. Issue 1. Pp. 132–143. DOI: 10.1007/s13296-023-00805-4. EDN QJSLTJ.
20. Piskulic M., Vujanac R., Vulović S., Miloradovic N., Blagojevic M., Djordjevic Z. Structural Performance of Semi-Rigid Beam-to-Column Connections in Steel Storage Racks: A Review Focused on FEM Analysis // *Metals*. 2026. Vol. 16. Issue 1. P. 2. DOI: 10.3390/met16010002. EDN ZOHPCX.

Поступила в редакцию 20 апреля 2026 г.

Принята в доработанном виде 28 апреля 2026 г.

Одобрена для публикации 12 мая 2026 г.

ОБ АВТОРАХ: **Иван Владимирович Мыльников** — аспирант кафедры металлических и деревянных конструкций; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; SPIN-код: 3437-1337; РИНЦ ID: 1234163, Scopus: 60572662500, ORCID: 0009-0000-4381-7393; miv_2499@mail.ru;

Валентина Матвеевна Туснина — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры архитектурно-строительного проектирования и физики среды; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; SPIN-код: 7716-5978, РИНЦ ID: 455915, Scopus: 56296961500, ResearcherID: AAD-8968-2022, ORCID: 0000-0003-0328-0848; tusninavm@mgsu.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

INTRODUCTION

A steel frame of a multi-storey building designed as a braced structural system conforms well to the principle of material concentration and differs from moment-resisting and braced frames in the simplicity of beam-to-column connections and in lower construction labour input. In the analysis of such frames, beam-to-column joints are theoretically assumed to be pinned; however, as studies of their actual behaviour show, in practice they possess a certain stiffness that depends on their structural configuration.

NRU MGSU has developed a quick-assembly contact beam-to-column joint that does not require welding or bolting on site. The joint is formed by placing the beam into special components, namely sockets welded to the column under factory conditions. In this beam-to-column connection, forces are transferred through the contact interaction of the supporting joint components, or the dovetail system.

Modern metalworking capabilities enable the production of frame members with such embedded components, thereby facilitating rapid and simple erection of the steel frame and substantially reducing the construction period [1–3].

This study examines the actual behaviour of a quick-assembly contact beam-to-column joint of the dovetail type in the steel frame of a multi-storey building.

MATERIALS AND METHODS

Problem statement

Consider a quick-assembly beam-to-column joint based on the dovetail system. The beam section is a rolled I-beam 20B1, with a $150 \times 100 \times 10$ mm support rib; the column section is a square cold-formed welded hollow section 200×8 mm, with a $190 \times 160 \times 20$ mm support socket and a seating slot of $140 \times 105 \times 15$ mm (Fig. 1–3). The beam is installed by placing its support ribs into sockets welded to two columns. The material is S345K steel.

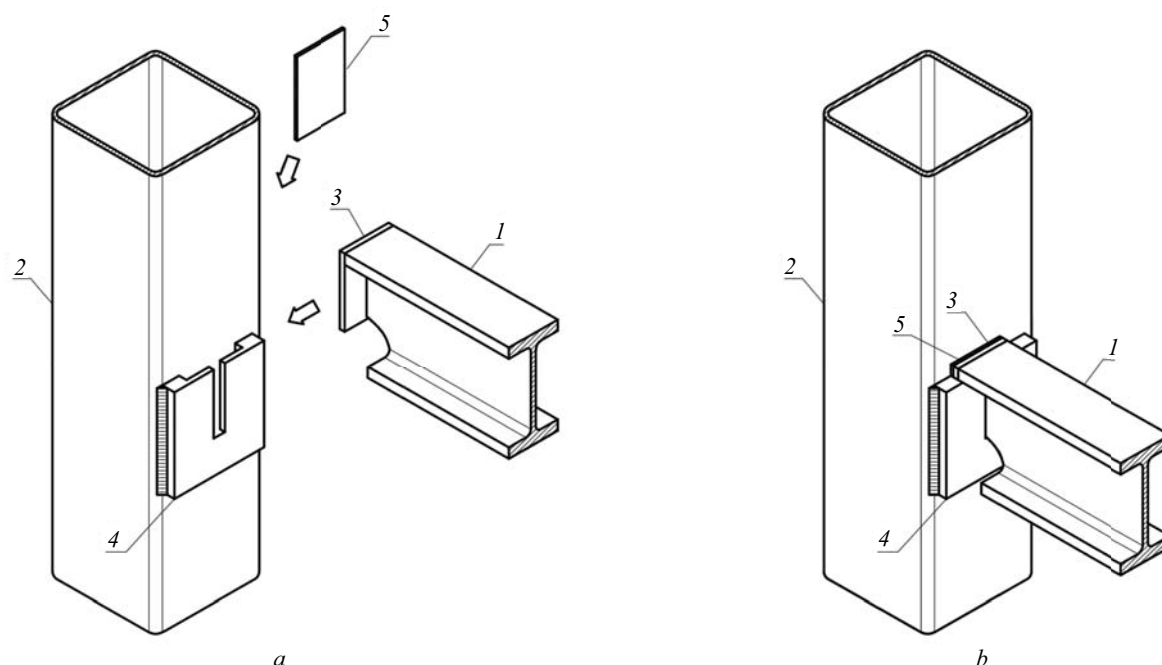


Fig. 1. Assembly diagram of the beam-to-column joint based on the dovetail system: *a* — disassembled joint; *b* — assembled joint; 1 — beam; 2 — column; 3 — support rib; 4 — support socket; 5 — shim plate

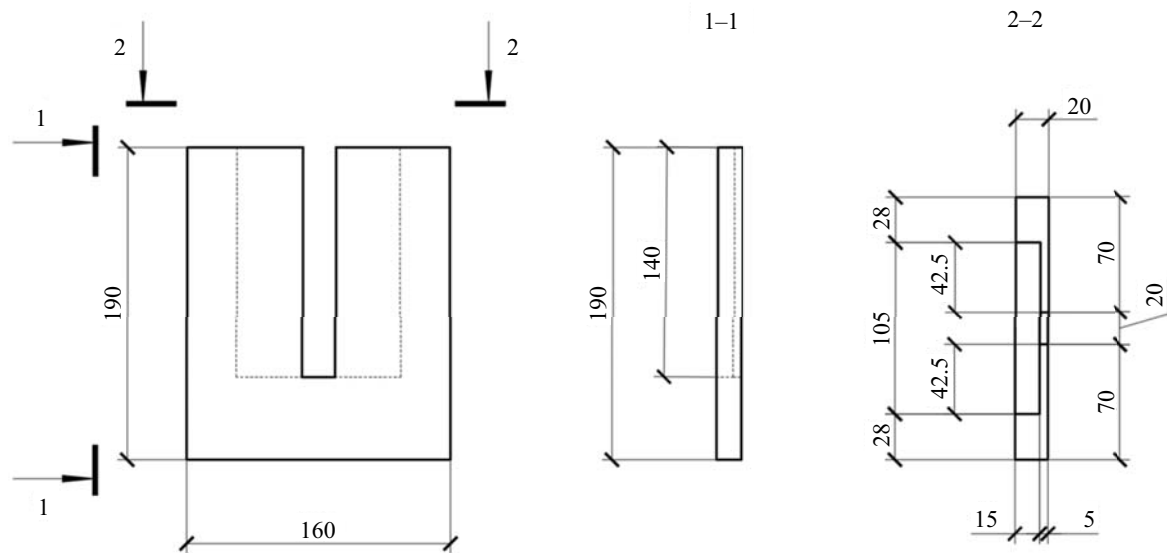


Fig. 2. Dimensions of the support socket welded to the column

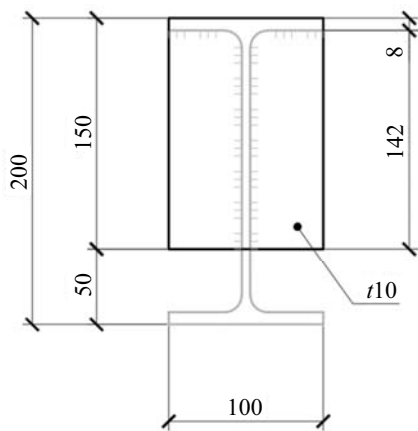


Fig. 3. Dimensions of the support rib welded to the beam

The connection has two gaps: Δ_1 is between the column wall and the support rib, and Δ_2 is between the support rib and the support-socket plates (Fig. 4). Gap Δ_1 is tightly filled in situ with shim plates to prevent the longitudinal displacement of the beam. The remaining gap Δ_2 is small [4–7].

It is assumed that gap Δ_1 is completely filled and gap Δ_2 is equal to zero, which corresponds to a perfectly tight fit. Thus, when a transverse load acts on the beam, a bending moment M of a certain magnitude arises at the supports; this magnitude depends on the compliance of connection C .

Bending moment M develops under the lateral loading of the beam; the beam support rib and the support-socket plates deform while resisting rotation. Horizontal displacement Δ and rotation angle φ occur in the plane of the beam web about point O , causing significant shear stresses in the zone where the retaining plate is fixed to the support socket [8–10].

For this connection, it is necessary to determine:

- 1) the limiting bending moment M_{lim} ;

- 2) the rotation angle φ of the beam support section;

- 3) the beam fixity coefficient C and the actual distribution of bending moment M in the beam.

The solution uses the kinematic method of the theory of limit equilibrium, which may be formulated as follows: for a given statically indeterminate system subjected to a specified type of load, the limiting load P_{lim} corresponding to the distribution of bending moments for any possible failure mechanism is always greater than or equal to the actual failure load; in other words, among all failure modes, the true one is the mode corresponding to the smallest limiting load P_{lim} [11].

According to this method, among all possible single-degree-of-freedom failure mechanisms, the equilibrium equation must be written according to the Lagrange's principle for the displacements possible for the given mechanism. In this case, the virtual work of external forces is considered positive and is equal to the product of the force $P_{i,lim}$ and the corresponding linear displacement Δ_p , whereas the virtual work of internal forces, i.e. the limiting bending moments $M_{j,lim}$ arising in plastic hinges, is negative and equal to the product of $M_{j,lim}$ and the rotation angle θ_j characterizing the possible deformation in the j -th hinge:

$$\sum_i P_{i,pr} \Delta_i = \sum_j M_{j,pr} \theta_j.$$

In the solution, the rigid-plastic body diagram is used (Fig. 5), according to which the material is assumed to remain absolutely undeformed until plastic flow develops. This model adequately characterizes the actual behaviour of the structure in the absence of factors restraining the development of deformations in the plastic range. Since plastic deformations can considerably exceed elastic deformations, the use of the rigid-plastic body idealization is justified.

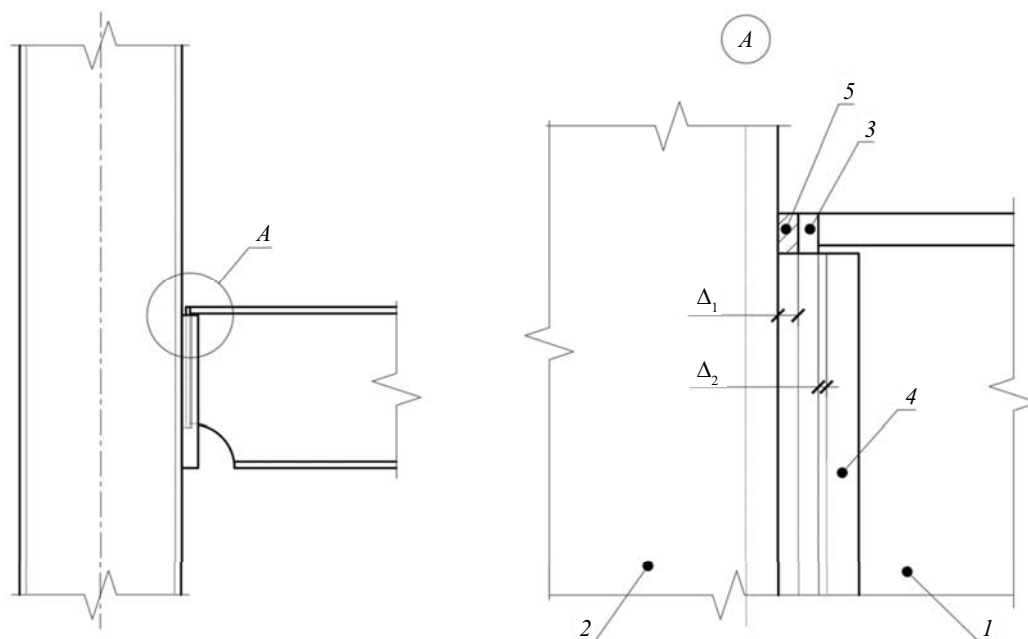


Fig. 4. Gaps in the joint: 1 — beam; 2 — column; 3 — support rib; 4 — support socket; 5 — shim plate

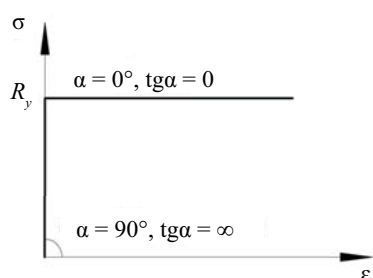


Fig. 5. The $\sigma - \varepsilon$ diagram for a rigid-plastic body

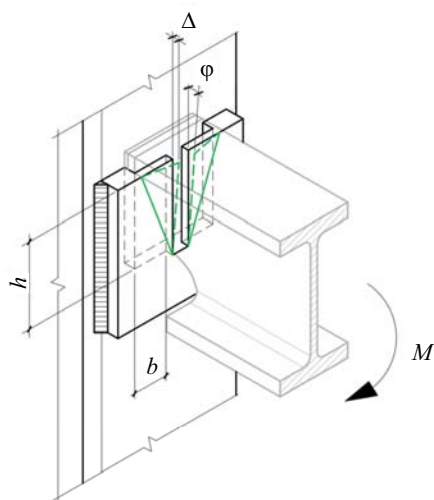


Fig. 6. Kinematic mechanism diagram of the joint

The kinematic mechanism diagram of the joint is shown in Fig. 6.

In the calculation, the support socket is represented as two plates attached to a rigid body and subjected

to out-of-plane bending. The kinematic mechanism of the joint under consideration is based on the following assumptions:

1. The yield lines are linear plastic hinges along which only moment vectors act.
2. The plate is considered rigidly fixed along two adjacent edges and free from restraints along the other two adjacent edges.

Determination of the limiting bending moment M_{lim}

Consider a kinematically admissible state of the support socket under beam bending. In Fig. 7, segment AB corresponds to a linear plastic hinge whose length is:

$$AB = l = \sqrt{b^2 + h^2}.$$

The rotation angle φ in the plane of the beam web is:

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\Delta}{h}.$$

Neglecting vertical displacement under the transverse bending of the plate, point C moves horizontally to point C' . The dihedral angle $CABC'$ is:

$$\angle CABC' = \theta \approx \tan \theta = \frac{\Delta}{x} = \frac{\Delta \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}.$$

For two plates, the work of internal forces is determined by the following expression:

$$U = 2 \int_0^l M_{pl} \theta dL \approx 2 M_{pl} \sum \theta_i l_i,$$

where $M_{pl} = R_y W_{pl} = \sigma_t t^2 / 4$ is the unit limiting bending moment at which yielding occurs; R_y denotes the design yield strength of steel; t denotes the plate thickness; l denotes the length of the linear plastic hinge; and l_i is the el-

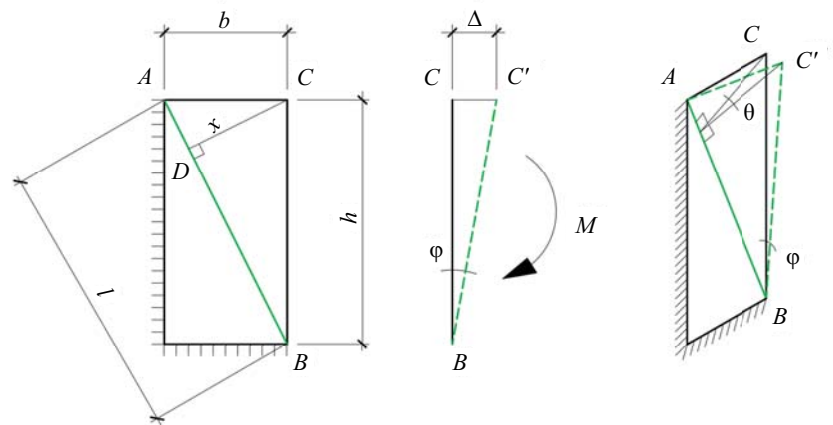


Fig. 7. Plastic hinge diagram in the joint for one of the two support-socket plates

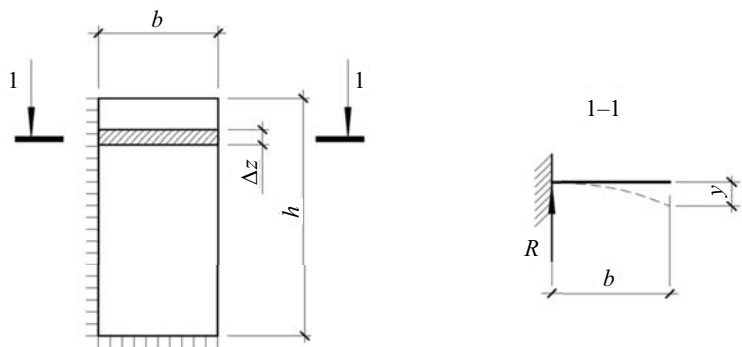


Fig. 8. Design diagram of the plate

ementary kink angle and the corresponding elementary length of the linear hinge.

Then the expression conveying the work of internal forces in the plate takes the form:

$$U = 2 \frac{R_y t^2}{4} \cdot \frac{\Delta \sqrt{b^2 + h^2}}{bh} \cdot \sqrt{b^2 + h^2} = 2 \frac{R_y t^2}{4} \cdot \frac{\Delta}{bh} \cdot (b^2 + h^2) = \frac{R_y t^2}{2} \cdot \frac{\Delta}{b} \cdot \frac{b^2 + h^2}{h}.$$

The work of external forces is:

$$A = M \varphi = M \frac{\Delta}{h}.$$

Equating the expressions for the work of external and internal forces gives:

$$M \frac{\Delta}{h} = \frac{R_y t^2}{2} \cdot \frac{\Delta}{b} \cdot \frac{b^2 + h^2}{h},$$

from which the limiting bending moment resisted by the support joint can be determined:

$$M_{lim} = \frac{R_y t^2}{2} \cdot \frac{b^2 + h^2}{b}.$$

Determination of the beam fixity coefficient C

To determine the joint stiffness C, consider an elementary horizontal cantilever strip of the plate that has width Δz (Fig. 8).

The horizontal reaction caused by displacement of the free edge is:

$$R = \frac{3EJ}{b^3} \cdot y = \frac{E \cdot \Delta z \cdot t^3}{4b^3} \cdot y,$$

where E denotes the modulus of elasticity of steel; J = Δz × t³/12. denotes the moment of inertia of the elementary strip; b and t — width and thickness of the plate.

The rotation angle of the plate at the fixed edge is variable and is determined as follows (Fig. 9):

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma \approx y/z.$$

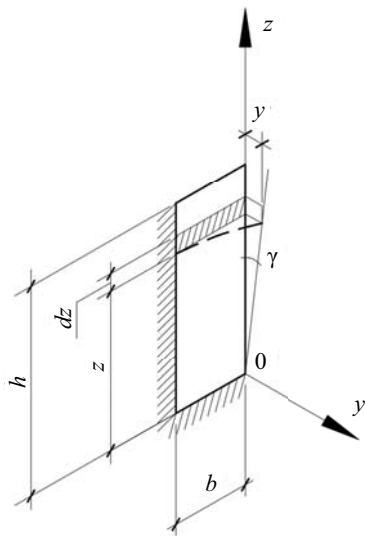


Fig. 9. Plate deformation diagram

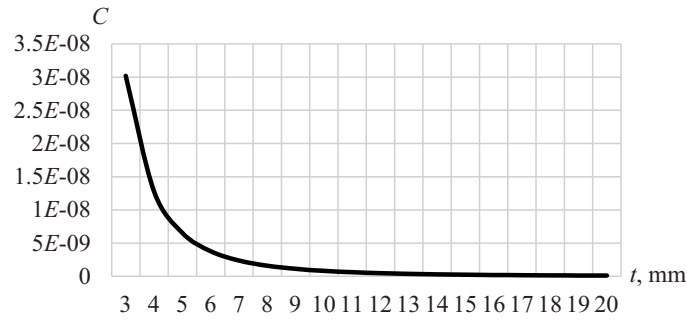


Fig. 10. Dependence of the beam fixity coefficient C on plate thickness t

Hence

$$y = \gamma \cdot z.$$

Then:

$$R = \frac{E \cdot \Delta z \cdot t^3}{4b^3} \cdot \gamma \cdot z.$$

Assuming, for simplicity, that the strips of width Δz are not connected to one another, the expression for the specific bending moment $\bar{M}$, corresponding to a unit rotation angle of the beam support section in the joint, can be written as:

$$\begin{aligned} \bar{M} = \frac{M}{\gamma} &= 2 \int_0^h \frac{R z dz}{\gamma \Delta z} = 2 \int_0^h \left(\frac{E \cdot \Delta z \cdot t^3}{4b^3} \cdot \gamma \cdot z \right) \frac{z dz}{\gamma \Delta z} = \\ &= \frac{2E \cdot t^3}{4b^3} \int_0^h z^2 dz = \frac{E}{2} \left(\frac{t}{b} \right)^3 \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{E}{6} \left(\frac{t \cdot h}{b} \right)^3. \end{aligned}$$

The beam fixity coefficient is the reciprocal of the specific bending moment corresponding to a unit rotation angle of the beam support section in the joint. Therefore, the expression for the beam fixity coefficient is:

$$C = \frac{1}{\bar{M}} = \frac{6}{E} \left(\frac{b}{t \cdot h} \right)^3.$$

Fig. 10 shows the dependence of the beam fixity coefficient C on the plate thickness t (parameters b and h are taken as constant values). The curve is a cubic hyperbola.

RESULTS

Determination of support moments in girders and rotations of their support sections

To determine the support moments in the beam and the rotations of its support sections, a stepped-stiffness beam elastically restrained at the supports and loaded by two concentrated forces $P/2$ at a distance d from the beam end is used as the design diagram (Fig. 11). The influence of column stiffness is assumed to be insignificant.

The length m indicated in Fig. 11 is equal to the thickness of the retaining plate, i.e. $m = t$.

The degree of static indeterminacy of the given system is 1. The support moment in the girder is determined by the force method. The primary system is a classical simply supported beam (Fig. 12, *a*), in which the bending moment at the supports is taken as the symmetric unknown X_1 . The canonical equation of the force method is written as:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + \varphi = 0.$$

The left-hand side of the equation describes the total support rotation angle, where φ denotes the part of this angle that depends on the beam fixity coefficient, determined above: $\varphi = c \cdot X_1$.

Then the canonical equation of the force method takes the form:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + C \cdot X_1 = 0.$$

The unit bending-moment diagram $\bar{M}_1$ and the load bending-moment diagram M_p are shown in Fig. 12, *b* and 12, *c*.

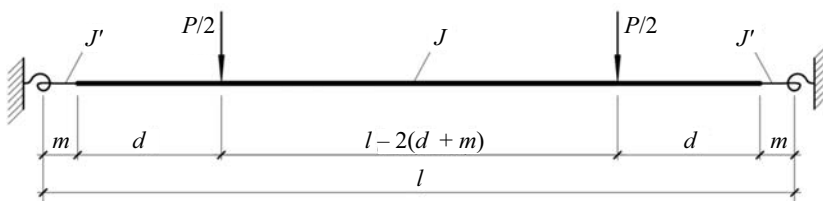


Fig. 11. Design diagram of a stepped-stiffness beam elastically restrained at the supports

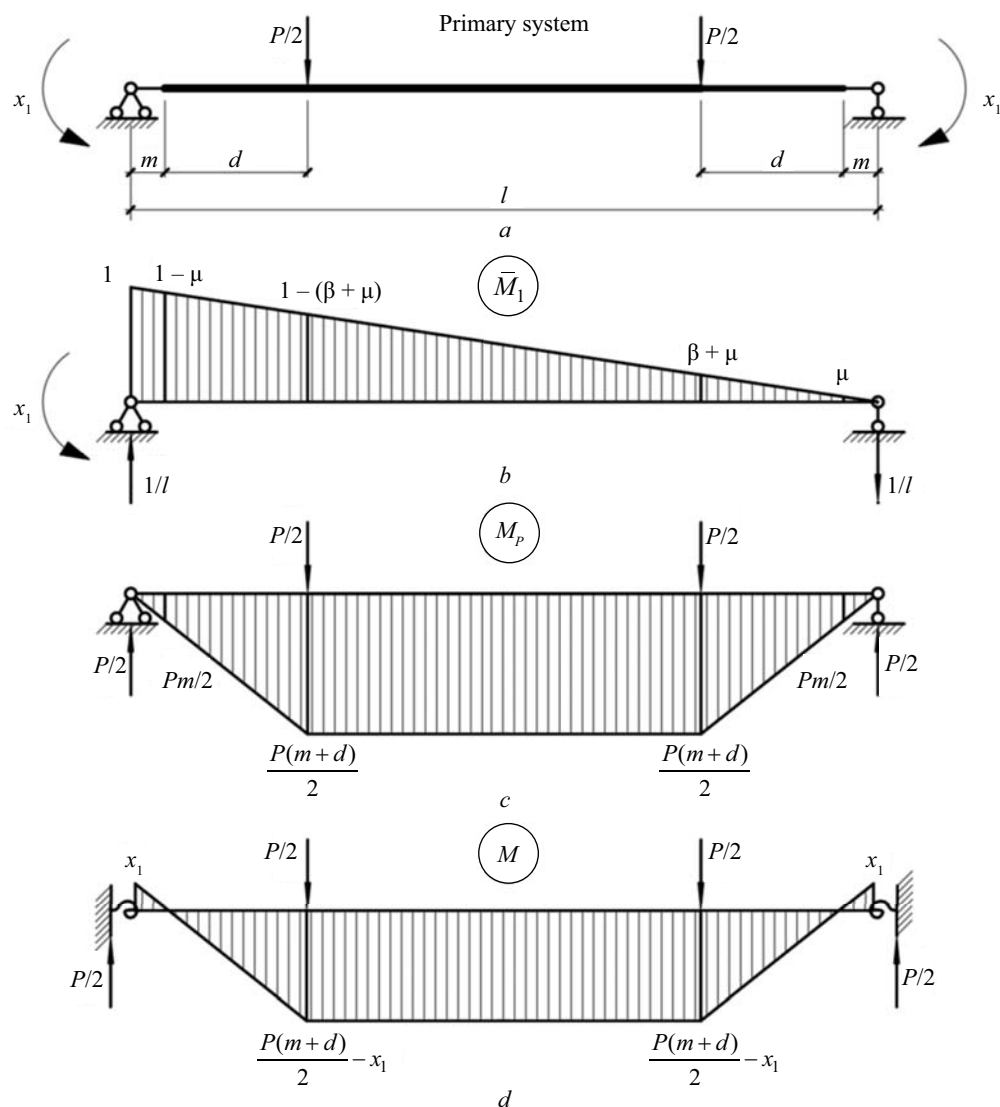


Fig. 12. Beam analysis by the force method: *a* — primary system; *b* — unit bending-moment diagram; *c* — load bending-moment diagram; *d* — final bending-moment diagram

The coefficients δ_{11} and Δ_{1P} are determined by the Maxwell – Mohr formula using the Vereshchagin's rule:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = 2 \frac{m \cdot 1 \cdot 1}{EJ'} + \frac{(l-2m) \cdot 1 \cdot 1}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_1 dx}{EJ} =$$

$$= -\frac{P(m+d)}{4EJ} (l-2(m+d)) \cdot 1 -$$

$$- \left[\frac{P(m+d)}{2} + \frac{Pm}{2} \right] \cdot d \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{Pm}{2} \cdot \frac{m}{EJ'}.$$

If it is assumed that:

$$J' = \alpha \cdot J; \quad m = \mu \cdot l; \quad d = \beta \cdot l,$$

then the expressions for δ_{11} and Δ_{1P} can be rewritten as:

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EJ} \left[1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right];$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pl^2}{4EJ} \left[\mu \left(1 - 2\mu + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - 2\mu - \beta) \right].$$

The unknown X_1 is determined as:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + C'};$$

$$X_1 = \frac{\frac{Pl^2}{4EJ} \left[\mu \left(1 - 2\mu + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta (1 - 2\mu - \beta) \right]}{\frac{l}{3EJ} \left[1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right] + \frac{6}{E} \left(\frac{b}{t \cdot h} \right)^3}.$$

Values of bending moments and rotations of support sections for different design diagrams

Number	Design diagram and bending-moment diagram	Span l , m	Distance a , m	Support moment M_s , kN·m	Span moment M_{sp} , kN·m	Support rotation φ_s , rad	Note
1		3.0	0.75	0	75	0.0222 (φ_s^p)	—
2		4.5	1.125	0	112.5	0.05 (φ_s^p)	—
3		6.0	1.5	0	150	0.0888 (φ_s^p)	—
4		3.0	0.75	3.27	71.73	0.0213	$M_s^e = 8.73 \% M_s^r$ $\varphi_s^e = 96.12 \% \varphi_s^p$
5		4.5	1.125	7.23	105.27	0.0471	$M_s^e = 12.85 \% M_s^r$ $\varphi_s^e = 94.29 \% \varphi_s^p$
6		6.0	1.5	12.61	137.39	0.0822	$M_s^e = 16.81 \% M_s^r$ $\varphi_s^e = 92.53 \% \varphi_s^p$
7		3.0	0.75	20.60	54.40	0.0168	$M_s^e = 54.94 \% M_s^r$ $\varphi_s^e = 75.58 \% \varphi_s^p$
8		4.5	1.125	41.31	71.19	0.0337	$M_s^e = 73.44 \% M_s^r$ $\varphi_s^e = 67.36 \% \varphi_s^p$
9		6.0	1.5	66.23	83.77	0.0540	$M_s^e = 88.31 \% M_s^r$ $\varphi_s^e = 60.75 \% \varphi_s^p$
10		3.0	0.75	37.5 (M_s^r)	37.5	0	—
11		4.5	1.125	56.25 (M_s^r)	56.25	0	—
12		6.0	1.5	75 (M_s^r)	75	0	—

Note: M_s^r and M_s^e are the support moments arising in a beam with rigid or elastic end restraint, respectively; φ_s^p and φ_s^e are the support rotation angles arising in a simply supported or elastically restrained beam, respectively.

After simplifying the resulting expression and neglecting the component μ because of its small magnitude compared with unity, one can write:

$$X_1 = \frac{Pl \left[\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta(1-\beta) \right]}{\frac{4}{3} + 4\mu \left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{4}{3}\beta \right) + 24 \cdot \frac{J}{l} \left(\frac{b}{t \cdot h} \right)^3}.$$

Given that $2 \frac{th^3}{12} = \alpha \cdot J$, the final formula for determining the support moment in a beam with dovetail-type joints can be written as:

$$M_{op} = \frac{Pl \left[\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta(1-\beta) \right]}{\frac{4}{3} + 4\mu \left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{4}{3}\beta \right) + \frac{4b}{\alpha \cdot l} \left(\frac{b}{t} \right)^2}.$$

The maximum bending moment in the span for the two-point bending diagram is:

$$M_{pr} = \frac{P(t+d)}{2} - \frac{Pl \left[\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta(1-\beta) \right]}{\frac{4}{3} + 4\mu \left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{4}{3}\beta \right) + \frac{4b}{\alpha \cdot l} \left(\frac{b}{t} \right)^2}.$$

The final bending-moment diagram is shown in Fig. 12, d.

The beam rotation angle at the support, which depends on the elastic properties of the joint, can be determined as follows:

$$\varphi = C \cdot X_1; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + C};$$

$$\varphi = -\frac{\Delta_{1P}}{\frac{\delta_{11}}{C} + 1} =$$

$$= \frac{\frac{Pl^2}{4EJ} \left[\mu \left(1 - 2\mu + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta(1-2\mu-\beta) \right]}{\frac{l}{3EJ} \left[1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right] + 1} =$$

$$= \frac{Pl^2}{4EJ} \cdot \frac{\mu \left(1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) + \beta(1-\beta)}{1 + \frac{\alpha t^2 l}{3b^3} \cdot \left[1 + \mu \left(\frac{3}{\alpha} - 3 - 4\beta \right) \right]}.$$

Using the expressions obtained, the behaviour of a beam elastically restrained at both ends can be com-

pared with the classical cases: a simply supported beam and a beam rigidly fixed at both ends [12–15]. The table presents the values of bending moments and rotation angles of support sections for different calculation cases [16–20]. Beam spans of 3, 4.5 and 6 m are considered; two concentrated forces are applied at a distance $a = l/4$ from the supports. For the elastically restrained beam, the moments and rotation angles were determined for $b = 42.5$ mm, $h = 140$ mm, and $t = 5$ and 10 mm. The beam section is a rolled I-beam 20B1 according to GOST R 57837–2017. The force P is taken as 200 kN.

CONCLUSION

Based on the kinematic method of the theory of limit equilibrium, expressions were obtained for determining the limiting bending moment M_{lim} and the beam fixity coefficient C for the contact beam-to-column joint with a dovetail connection.

Using the force method, the actual bending-moment diagram was constructed for a beam elastically restrained at both ends and loaded by two concentrated forces arranged symmetrically with respect to the supports.

A formula was obtained for determining the rotation angle φ of the beam support section for the contact beam-to-column joint of the dovetail type.

Based on the comparison with the classical beam support cases, namely hinged supports and rigid end fixities, it was established that the joint under consideration with a socket-plate thickness $t = 5$ mm is almost completely pinned. In this case, a significant support rota-

tion occurs: for the span $l = 3$ m it amounts to 96.12 % of the support rotation angle for the simply supported diagram, for the span $l = 4.5$ m to 94.29 %, and for the span $l = 6$ m to 92.53 %. The support bending moments occurring in the diagram with elastic end restraints are 8.73 % of those in the diagram with rigid end fixities for the span $l = 3$ m, 12.85 % for the span $l = 4.5$ m, and 16.81 % for the span $l = 6$ m. Thus, for engineering calculations it may be assumed that, when a compliant joint with retaining plates of thickness $t = 5$ mm is used, the ratio between the support and span moments is 1:10.

For the case in which the socket-plate thickness is taken as $t = 10$ mm, the stiffness of the joint increases. In this case, the support rotation angle is 75.58 % of the support rotation angle for the simply supported diagram and the span $l = 3$ m, 67.36 % for the span $l = 4.5$ m, and 60.75 % for the span $l = 6$ m. The support bending moments in the beam with elastic end restraints are 54.94 % of those in the diagram with rigid end fixities for the span $l = 3$ m, 73.44 % for the span $l = 4.5$ m, and 88.31 % for the span $l = 6$ m. Consequently, the use of such retaining plates allows the beam end restraints to be regarded as semi-rigid and contributes to reducing span moments; however, it should be noted that this increases the metal consumption of the joint.

The quick-assembly joint under study accelerates the erection of steel-frame members on site, while the characteristics determined above allow the actual behaviour of the joint to be taken into account in structural analysis. The proposed contact beam-to-column joint can be recommended for practical engineering applications.

REFERENCES

1. Kukla D., Kozłowski A., Ślęczka L., Wójcik-Grząba I., Nykiel D., Gubernat S. Innovative steel beam-to-column joint under central column loss situation: Experimental tests and analytical model. *Engineering Structures*. 2025; 326:119513. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.119513. EDN DXUCZE.
2. Zhang Z.W., Li D., Wang H.J., Qian H.L., Fang W.Q., Jing X.F. et al. Study of mechanical properties of a novel column-beam-column prefabricated steel frame joint. *Advanced Steel Construction*. 2024; 20(4):330-344. DOI: 10.18057/ijasc.2024.20.4.2
3. Shi G., Liu M., Luo J., Zhao H. Experimental study on the seismic behavior of steel joints between I-beam and box-T built-up section columns. *Thin-Walled Structures*. 2025; 216:113626. DOI: 10.1016/j.tws.2025.113626. EDN SEAQTN.
4. Sun G., Mironova L.I. Influence of rotational stiffness of beam-to-column connection on steel frame performance. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025; 21(6):537-550. DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-6-537-550. EDN FOHZXB. (rus.).
5. Jakovljević I., Dobrić J., Gluhović N., Spremić M. Beam-to-column joint solutions for reusable moment-resisting steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*. 2026; 238:110163. DOI: 10.1016/j.jcsr.2025.110163. EDN AWZYWD.
6. Elhout E.A. Effect of beam-column connection types on the response modification factors of steel frames. *International Journal of Steel Structures*. 2024; 24(1):132-143. DOI: 10.1007/s13296-023-00805-4. EDN QJSLTJ.
7. Piskulic M., Vujanac R., Vulović S., Miloradovic N., Blagojevic M., Djordjevic Z. Structural Performance of Semi-Rigid Beam-to-Column Connections in Steel Storage Racks: A Review Focused on FEM Analysis. *Metals*. 2026; 16(1):2. DOI: 10.3390/met16010002. EDN ZOHPCX.
8. Tushina V.M. *Load-bearing capacity and deformability of malleable components of steel frames of multi-storey buildings : dissertation ... candidate of technical sciences*. Moscow, 1989; 166. (rus.).
9. Ferdous W. Effect of beam-column joint stiffness on the design of beams. *23rd Australian Confer-*

ence on the Mechanics of Structures and Materials. 2014; 701-706.

10. Tusnina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections. *Magazine of Civil Engineering*. 2017; 5(73):25-39. DOI: 10.18720/MCE.73.3. EDN ZNLKNH.

11. Anokhin N.N. Structural mechanics in examples and tasks. Part II. Statically indeterminate systems : textbook. *4th edition, expanded and revised*. Moscow, ASV Publishing House, 2017; 464. (rus.).

12. Glebov F.A., Astakhov I.V., Korsun V.I., Kondratyeva L.N., Tsyganovkin V. Analytical model of the method of variable elasticity parameters for flange beam to column connections. *Engineering journal of Don*. 2024; 1(109):462-496. EDN QHDFKI. (rus.).

13. Nie R., Li Y., Bai Y., Mou B., Zhou Ya. HSS steel corner column to H-beam joints under cyclic bidirectional loadings: Experiment, numerical modeling, and calculation. *Journal of Constructional Steel Research*. 2022; 192:107239. DOI: 10.1016/j.jcsr.2022.107239. EDN PUAQCH.

14. Lian Ju.Yi., Deng En.F., He J.M., Cai Li.M., Gao Sh.C., Zhou Ji.J. Numerical analysis on seismic performance of corner fitting connection in modular steel building. *Structures*. 2021; 33:1659-1676. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.05.044. EDN ZHINRZ.

15. Celik H., Şakar G. Semi-rigid connections in steel structures: State-of-the-art report on modelling, anal-

ysis and design. *Structural Engineering and Mechanics*. 2022; 45(1).

16. Yin T., Wang Zh., Zheng K., Lu Sh. A new method for design of the semi-rigid steel frame — the integration of joint inverse design and structural design. *Buildings*. 2022; 12(7):938. DOI: 10.3390/buildings12070938. EDN MRTYXE.

17. Rodríguez González C.A., Caparrós-Manceira Ju.J., Hernández-Torres J.A., Rodríguez-Pérez Á.M. Nonlinear analysis of rotational springs to model semi-rigid frames. *Entropy*. 2022; 24(7):953. DOI: 10.3390/e24070953. EDN FFTQGF.

18. Al-Sherif R.H., Ismael M.A. Effect of semi-rigid beam-column connection on structural behavior of steel frames. *AIP Conference Proceedings*. 2023; 2784:020008. DOI: 10.1063/5.0140815

19. Elhout E.A. Effect of beam-column connection types on the response modification factors of steel frames. *International Journal of Steel Structures*. 2024; 24(1):132-143. DOI: 10.1007/s13296-023-00805-4. EDN QJSLTJ.

20. Piskulic M., Vujanac R., Vulović S., Miloradovic N., Blagojevic M., Djordjevic Z. Structural Performance of Semi-Rigid Beam-to-Column Connections in Steel Storage Racks: A Review Focused on FEM Analysis. *Metals*. 2026; 16(1):2. DOI: 10.3390/met16010002. EDN ZOHPCX.

Received April 20, 2026.

Adopted in revised form on April 28, 2026.

Approved for publication on May 12, 2026.

B I O N O T E S : **Ivan V. Mylnikov** — postgraduate student of the Department of Metal and Wooden Structures; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; SPIN-code: 3437-1337; ID RSCI: 1234163, Scopus: 60572662500, ORCID: 0009-0000-4381-7393; miv_2499@mail.ru;

Valentina M. Tusnina — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Architectural and Construction Design and Environmental Physics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; SPIN-code: 7716-5978, ID RSCI: 455915, Scopus: 56296961500, ResearcherID: AAD-8968-2022, ORCID: 0000-0003-0328-0848; tusninavm@mgsu.ru.

Contribution of the authors: all authors contributed equally to the publication.

The authors declare no conflicts of interest.